FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 12

1.–2. Tarkastellaan jatkuvien lineaaristen operaattorien $T_n : X \to Y$ muodostamia perheitä, missä $n \in \mathbf{N}$ sekä X ja Y Banach–avaruuksia. Banach–Steinhausin lauseen mukaan joko

1° on olemassa $M \in [0, \infty[$ jolle
$$\|T_n\| \leq M$$
kaikilla n, tai

2° voidaan löytää lähtöavaruuden X vektori x, jolle
$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty.$$

Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee. Mikäli 2° pätee, etsi lisäksi joku vektori $x \in X$, jolla on väitetty ominaisuus.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

b) $X = Y = C(0,1)$, ja T_n on kompositio–operaattori $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$, kun $t \in [0,1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbf{R})$, $T_n f(x) := f(x/n)$ melkein kaikilla x.

d) $X = Y = \ell^2_w$, joka on painotettu ℓ^2–avaruus
$$\ell^2_w := \left\{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \;\middle|\; \|x\|_w := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 e^k \Big)^{1/2} < \infty \right\}$$
ja
$$T_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_{k-n})_{k=1}^{\infty},$$
missä $x_m := 0$, kun $m \leq 0$.

3. Etsi esimerkki Banach–avaruuden E suljetuista ja rajoitetuista osajoukoista A ja B, joille $A + B := \{x + y \mid x \in A \ , \ y \in B\}$ ei ole suljettu.

4. Olkoot E, F ja G Banach–avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_{1,z} : E \to G$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ sekä $A_{2,w} : F \to G$, $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ molemmat ovat lineaarisia, kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$. Osoita Banach–Steinhausin lauseen avulla, että bilineaarikuvaus A on rajoitettu (eli
$$\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_G \mid \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} < \infty \qquad)$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_{1,z} : E \to G$ ja $A_{2,w} : F \to G$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$.

****

1.–2. We consider the family formed by the bounded linear operators $T_n : X \to Y$, where $n \in \mathbf{N}$ and X and Y are Banach spaces. According to the Banach–Steinhaus theorem, either

1° there exists an $M \in [0, \infty[$ such that

$$\|T_n\| \leq M$$

for all n, or

2° there exists a vector $x \in X$ such that

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty.$$

Which statement holds in the following cases? If it is 2°, then find a vector x with the above mentioned property.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

b) $X = Y = C(0,1)$, and T_n is the composition operator $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$ for $t \in [0,1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbf{R})$, $T_n f(x) := f(x/n)$ for almost every x.

d) $X = Y = \ell^2_w$, the weighted ℓ^2-space

$$\ell^2_w := \left\{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \;\middle|\; \|x\|_w := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 e^k \Big)^{1/2} < \infty \right\}$$

and

$$T_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_{k-n})_{k=1}^{\infty},$$

where $x_m := 0$ for $m \leq 0$.

3. Give an example of bounded and closed subsets A ja B of a Banach space E such that the set $A + B := \{x + y \mid x \in A \;,\; y \in B\}$ is not closed.

4. Let E, F and G be Banach spaces. The mapping $A : E \times F \to G$ is *bilinear*, if both the mappings $A_{1,z} : E \to G$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ and $A_{2,w} : F \to G$, $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ are linear, for all $w \in E$ and $z \in F$. Using the Banach–Steinhaus theorem, prove that the bilinear mapping A is bounded (that is,

$$\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_G \mid \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} < \infty \qquad)$$

if and only if the linear mappings $A_{1,z} : E \to G$ and $A_{2,w} : F \to G$ are bounded for all $w \in E$ and $z \in F$.