FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 11

1. Olkoon X Banach-avaruus ja A, B jatkuvia lineaarioperaattoreita $X \to X$. Sanotaan, että A ja B kommutoivat, jos $AB = BA$. Kommutoivatko ne seuraavissa tapauksissa:

a) $A = T^n$, $B = T^m$, missä m, $n \in \mathbf{N}$, sekä X ja jatkuva lineaarioperaattori $T : X \to X$ mielivaltaisia;

b) $X = \ell^2$, A ja B ovat harjoituksen 4 tehtävän 2 operaattorit S ja T.

c) $X = C(0,1)$ ja $A = C_\varphi$ ja $B = C_\psi$ ovat kompositio-operaattoreita (harjoitus 4, tehtävä 1), ja $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = 1 - t$.

d) kuten edellinen kohta, mutta $\varphi(t) = t^3$, $\psi(t) = \sqrt{t}$.

2. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Esitä jokin isomorfismi T avaruudelta $L^p(]0,1[)$ avaruuteen E, kun a) $E := L^p(]-5,5[)$ b) $E := L^p(]0,\infty[$. Ensimmäisessä tapauksessa, esitä kaksi erilaista esimerkkiä T:stä. Jälkimmäisessä tapauksessa T voisi olla esim. muotoa $Tf(x) = g(x)f(h(x))$, missä $f \in L^p(]0,1[)$, $x \in]0,\infty[$ on muuttuja, sekä g ja h ovat sopivasti valittuja funktioita $]0,\infty[\to \mathbf{R}$. Tarvitset määrätyn integraalin muuttujanvaihtokaavaa.

3. Suppeneeko operaattorijono $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $T_n : L^1(-2,2) \to L^1(-2,2)$, pisteittäin tai (operaattori)normin mielessä, kun $n \to \infty$ ja

$$(T_n f)(x) := \chi_n(x) f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in [-2,2] \qquad (a)$$

ja χ_n on välin $[-1-1/n, 1+1/n]$ karakteristinen funktio. Samoin, kun

$$(T_n f)(x) := e^{-x^2/n} f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in [-2,2]. \qquad (b)$$

4. Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) - \int_{-1}^{1} K(x,t) f(t)\,dt = g(x) \ , \quad x \in [-1,1], \qquad (1)$$

missä $g \in C(-1,1)$ annettu ja $f \in C(-1,1)$ tuntematon, sekä integraaliydin K on jatkuva molempien muuttujien suhteen sekä $|K(x,t)| \leq 1/10$ kaikilla x, t. Sekä Banachin kiintopistelause että Neumannin sarja antavat approksimointimenetelmän yhtälön (1) ratkaisulle. Vertaa näitä approksimaatioita.
****

1. Let X be a Banach space and A, B bounded linear operators $X \to X$. We say that A and B commute, if $AB = BA$. Does this happen in the following cases:

a) $A = T^n$, $B = T^m$, where m, $n \in \mathbf{N}$, and X and the bounded linear operator $T : X \to X$ are arbitrary;

b) $X = \ell^2$, A and B are the operators S ja T of Exercise 4.2.

c) $X = C(0,1)$ ja $A = C_\varphi$ and $B = C_\psi$ are composition operators (cf. Exercise 4.1) and $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = 1 - t$.

d) as the previous item, but $\varphi(t) = t^3$, $\psi(t) = \sqrt{t}$.

2. Let $1 \le p \le \infty$. Find some isomorphism T from $L^p(]0,1[)$ onto the space E, when a) $E := L^p(]-5,5[)$ b) $E := L^p(]0,\infty[$. In the first case, give two different examples of T. In the second case, T might be of the form $Tf(x) = g(x)f(h(x))$, where $f \in L^p(]0,1[)$, $x \in]0,\infty[$ is a variable, and g and h are suitable functions $]0,\infty[\to \mathbf{R}$. You need the change of variables formula for integrals.

3. Does the sequence of operators $(T_n)_{n=1}^\infty$, where $T_n : L^1(-2,2) \to L^1(-2,2)$, converge pointwise or in (operator)norm, as $n \to \infty$, and

$$(T_n f)(x) := \chi_n(x) f(x) \text{ for almost every } x \in [-2,2] \tag{a}$$

and χ_n is the characteristic function of the interval $[-1-1/n, 1+1/n]$.
The same for

$$(T_n f)(x) := e^{-x^2/n} f(x) \text{ for almost every } x \in [-2,2]. \tag{b}$$

4. Consider the integral equation

$$f(x) - \int_{-1}^{1} K(x,t) f(t)\,dt = g(x) \ , \quad x \in [-1,1], \tag{1}$$

where $g \in C(-1,1)$ is given and $f \in C(-1,1)$ unknown, and the kernel K is continuous for both variables, and $|K(x,t)| \le 1/10$ for all x, t. The solution of (1) can be approximated using both Banach's fixed point theorem and the Neumann series. Compare these two approximations.