FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 10

1. Derivointi- ja integrointiharjoittelua kompleksiarvoisille funktioille. Seuraavassa $f$ on reaalimuuttujan $t$ kompleksiarvoinen funktio. Sen reaali- ja imaginaariosat $g$ ja $h$ ovat muuttujan $t$ reaaliarvoisia funktioita, jotka tulevat kaavasta $f(t) = g(t) + ih(t)$. Funktio $f$ derivoidaan ja integroidaan muuttujan $t$ suhteen tekemällä vastaavat operaatiot funktioille $g$ ja $h$, siis esim. $f'(t) = g'(t) + ih'(t)$. (Tosin monet reaalifunktion tapauksesta tutut derivoinnin ja integroinnin laskukaavat pätevät, eikä aina ole tarpeen määrätä reaali- ja imaginaariosaa esim. derivoinnin suorittamiseksi.)
Etsi $f$:n reaali- ja imaginaariosat (kohdat a-d ) ja laske derivaatta (kaikki kohdat) ja määrätty integraali $\int_0^1 f(t)dt$ (kohdat a-c,e ), kun $f$ on a) $(t^2 + 2it)^2$, b) $te^{-3it^2}$ ,

$$c) \ \frac{2-t}{1+it} \ , \ d) \ \frac{e^{-t^2+i3t}}{t-it^2} \ , \ e) \ (t+it)^n \ , \ n \in \mathbf{Z} \ , \ n \neq -1$$

2. Millä parametrin $\alpha \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio $x^\alpha$, missä $x \in \mathbf{R}$ on muuttuja, kuuluu Sobolev–avaruuteen $H^1(\Omega)$, kun $\Omega = ]0, 1[$.

3. Tarkastellaan avaruutta $X := C^\infty(-1, 1)$ joka koostuu funktioista $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, jotka ovat $C^\infty$eli mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituvia. Varustetaan tämä avaruus sup-normilla

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

Osoita, että derivaattakuvaus $f \mapsto f'$ on lineaarinen, mutta ei jatkuva kuvaus $X \to X$.

4. Määritellään lineaarikuvaus $Tf = f'$ (heikko derivaatta), kun $f \in H^1(\Omega)$, $\Omega = ]0, 1[$. Onko $T$ jatkuva kuvaus a) $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, b) $H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$. Jos on, arvioi $T$:n operaattorinormia niin hyvin kuin osaat.

*************************************************************************

1. Let $f$ be a complex valued function of the real variable $t$. Its real and imaginary parts $g$ ja $h$ are determined by the formula $f(t) = g(t) + ih(t)$. The function $f$ can be differentiated and integrated with respect to $t$ by doing these operations separately for $g$ and $h$, for example $f'(t) = g'(t) + ih'(t)$.
Find the real and imaginary parts of $f$ (items a-d), differentiate with respect to $t$ (all items), and calculate $\int_0^1 f(t)dt$ (items a-c,e ), when $f$ is a) $(t^2 + 2it)^2$, b) $te^{-3it^2}$ ,

$$c) \ \frac{2-t}{1+it} \ , \ d) \ \frac{e^{-t^2+i3t}}{t-it^2} \ , \ e) \ (t+it)^n \ , \ n \in \mathbf{Z} \ , \ n \neq -1$$

2. For which $\alpha \in \mathbf{R}$ does the function $x^\alpha$, where $x \in \mathbf{R}$ is a variable, belong to the Sobolev-space $H^1(\Omega)$, for $\Omega = ]0, 1[$.

3. Consider the space $X := C^\infty(-1,1)$ of functions $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, which are infinitely smooth. Let us equip it with the sup-norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

Show that the operator $f \mapsto f'$ is linear, but not bounded mapping $X \to X$.

4. Define the linear mapping $Tf = f'$ (weak derivative), for $f \in H^1(\Omega)$, $\Omega = ]0,1[$. Is $T$ continuous a) $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, b) $H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$. If so, give a good estimate for $T$.