INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer II
Övning 2, Svarsförslag
24.3.2011
Jeremias Berg

1. Lös differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$$

med försöket $y(x) = e^{rx}$.

Lösning: Inte något speciellt nytt här. Vi gör enligt tipset och försöker med $y(x) = e^{rx}$. Märk först att:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx} \\ y'(x) &= re^{rx} \\ y''(x) &= r^2e^{rx} \\ y^{(3)}(x) &= r^3e^{rx} \\ y^{(4)}(x) &= r^4e^{rx} \end{aligned}$$

Vi substistuerar nu och får:

$$\begin{aligned} r^4e^{rx} - 8r^2e^{rx} + 16e^{rx} = 0 \Leftrightarrow \\ (r^4 - 8r^2 + 16)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Eftersom $e^{rx} > 0 \, \forall x$ så har vi alltså reducerat lösandet av den givna ekvationen till att lösa $(r^4 - 8r^2 + 16) = 0$ Detta gör vi till följande

$$(r^4 - 8r^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow (r^2 - 4)^2 = 0$$

Ekvationen har alltså två dubbelrötter $x = \pm 2$. Med tidigare teorin om karakteristiska polynom och fundamentalsystem så har denna ekvation alltså ett fundamentalsystem som består av $\{e^2, xe^2, e^{-2}, xe^{-2}\}$ Således är alla lösningar $y(x)$ till denna ekvation av formen:

$$y(x) = C_1e^2 + C_2xe^2 + C_3e^{-2} + C_4xe^{-2}$$

2. Lös differentialekvationen

$$y'y'' = 1.$$

Lösning: Först måste vi märka att $y'' \neq 0$ och $y' \neq 0$. Detta går att verifiera enkelt, ifall någondera skulle vara 0 skulle ekvationens vänstra led vara lika med 0, men inte högra. Då vi har förbjudit detta kan vi skriva om ekvationen som:

$$y'y'' = 1 \Leftrightarrow y'' = \frac{1}{y'}$$

Om vi nu låter $f(x,y) = \frac{1}{y}$ så är vår ekvation nu av formen $y'' = f(x, y')$ (Se övning 1. uppgift 1). Vi kan substituera $z(t) = y'(t)$ och skriva om vår ekvation som

$$z'(t) = \frac{1}{z}$$

. Detta är en separerbar ekvation som inte har några triviallösningar. Vi löser den genom separering av variablerna:

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow$$
$$\int^z sds = \int^t 1du \Rightarrow$$
$$\frac{z^2}{2} = t + C_1^* \Leftrightarrow z^2 = 2t + C_1$$
$$z = \begin{cases} \sqrt{2t + C_1} & t > -\frac{C_1}{2} \\ -\sqrt{(2t + C_1)} & t < -\frac{C_1}{2} \end{cases}$$

Märk också att $t \neq -\frac{C_1}{2}$ Eftersom då skulle $z = y' = 0$ vilket tidigare nämndes vara omöjligt. Här kan även konstatera att $\forall x : y'(x) \neq 0$ är $y'' = \frac{1}{y'} \neq 0$ så kravet $y'' \neq 0$ som diskuterades i början orsakar inga fler restriktioner på x

Nu kan vi byta tillbaka för ett y och integrera:

$$y' = \pm\sqrt{2t + C_1}$$
$$y = \pm \int^x \sqrt{2t + C_1} dt = \pm\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(2x + C_1)^3} + C_2 = \pm\frac{\sqrt{(2x + C_1)^3}}{3} + C_2$$

Så de slutgiltiga lösningarna av givna ekvationen är

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2x+C_1)^3}}{3} + C_2 & x > -\frac{C_1}{2} \\ -(\frac{\sqrt{(2x+C_1)^3}}{3} + C_2) & x < -\frac{C_1}{2} \end{cases} \qquad x \neq -\frac{C_1}{2}$$

3. Undersök om följande funktioner f satisfierar villkorena i lokala existens-och entydighetssatsen i området $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$:

$$(i)\ f(x,y) = \sin(x) + \cos(y), \qquad (ii)\ f(x,y) = y^{1/3}.$$

Lösning: Nu någonting nytt. Kraverna för den hittills mest betydande satsen, Lokala existens och entydighetssatsen. För att visa att båda funktionerna uppfyller kraverna i området D måste vi visa 2 saker. Att funktionen i sin helhet är kontinuerlig och att den dessutom är likformigt Lipschitz - kontinuerlig med syfte på sin andra variabel (y). Nu kommer inte motivera det första av dessa kraven så särskillt nogrant. För att visa att funktionerna är kontinuerliga kan man antingen använda sig av tekniker som blir bekanta under kursen “vektoranalys” eller sen lite annorlunda tekniker från kursen topologi 1. Däremot för att visa Lipschitz kravet använder vi definitionen från kompendiet. En 2 variabels funktion $f(x, y)$ är Lipschitz kontinuerlig (med syfte på y) i ett område D om:

$$\exists M > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$$

för alla$(x, y_1), (x, y_2) \in D$

i) $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$
Funktioner är “tydligt” kontinuerlig i hela D. För att visa Lipschitz kravet väljer vi $M = 1$ och väljer 2 godtyckliga punkter $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. Nu gäller:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\sin(x) + \cos(y_1) - (\sin(x) + \cos(y_2))| =$$
$$|\cos(y_1) - \cos(y_2)| \overset{DMVS}{=} |-\sin(y^*)||y_1 - y_2| \text{ (för något } y_1 \leq y^* \leq y_2)$$
$$|-\sin(y^*)||y_1 - y_2| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2| = M|y_1 - y_2|$$

Vilket visar Lipschitz kravet och därmed också alla begärda krav för uppgiften.

ii) $f(x, y) = y^{1/3}$
Vi nöjer oss åter igen med att konstatera kontinuiteten av denna funktion. För Lipschitz kravet studerar vi igen 2 godtyckliga punkter $(x, y_1), (x, y_2) \in D$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}|$$

Nu studerar vi ett mindre område inom D. Nämligen $\{(x, y) : x > 0, 0 \leq y < 1\}$. Vi väljer en godtycklig punkt $(1, y_1)$ samt punkten $(1, 0)$ i detta intervall (orsaken att vi måst begränsa oss till en del av D är att vi vill använda DMVS igen). Nu gäller att:

$$|f(1, y_1) - f(1, 0)| = \left|\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{0}\right| \overset{DMVS}{=} \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}}\right| |y_1 - 0|$$

Och nu eftersom $\lim_{y \to 0} \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\right| = \infty$ Så existerar det inte något sånt ändligt M som skulle begrönsa funktionen nära 0:an (de facto är derivatan inte ens definierad där). Funktionen uppfyller alltså inte kraven för lokala existens och entydighetssatsen.

4. Verifiera att funktionen $f(x, y) = e^x \ln(1 + y^2)$ satisfierar villkorena i lokala existens- och entydighetssatsen i området $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 2, y \in \mathbf{R}\}$. Tips: undersök partiella derivatan $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   Lösning: Vi börjar med att konstatera kontinuiteten av f. För att visa Lipschitz använder vi oss av sats 4.5 i kompendiet. Den säger att för att en funktion skall vara Lipschitz med syfte på sin andra variabel i ett konvext område så räcker det att $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ är begränsad i hela området. Det vi har att visa är alltså att området faktiskt är konvext samt att derivatan är begränsad.

Vi börjar med att undersöka partiella derivatan:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}e^x \ln(1+y^2) = \frac{2ye^x}{1+y^2}$$

Påståendet vi skall bevisa nu är att

$$\forall (x,y) \in D : \left|\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right| < 20$$

För att visa detta börjar vi med att konstatera att eftersom i området som studeras är $0 < x < 2$ och exponentialfunktionen är strängt växande kan vi säga att:

$$\left|\frac{2ye^x}{1+y^2}\right| < \left|\frac{2ye^2}{1+y^2}\right| < \left|\frac{2y3^2}{1+y^2}\right| < \left|\frac{20y}{1+y^2}\right|$$

Nu har vi bara 2 olika fall att undersöka: i) $|y| < 1$
Då gäller:

$$\left|\frac{20y}{1+y^2}\right| \leq |20y| < 20$$

ii) $|y| \geq 1$
Nu gäller:

$$\left|\frac{20y}{1+y^2}\right| < \left|\frac{20y}{y^2}\right| \leq \left|\frac{20}{y}\right| \leq 20$$

Så i båda fallen håller påståendet och derivatan är således begränsad.

Nu är det bara konvexiteten av D kvar att visas. Formell behandling av detta hör inte till denna kurs, men konvexitet betyder i princip att ifall man ritar upp ett segment (en rak linje) mellan vilka två punkter som hellst i området så finns det inte en enda punkt på linjen som skulle ligga utanför området. Så betrakta nu godtyckliga $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ vi kan anta $x_1 \leq x_2$ Det andra fallet är analogt. Om vi nu ritar upp en rak linje mellan dem och betraktar en godtycklig punkt (x, y) på den så kan vi säga att (rita upp en bild ifall du inte hänger med):

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

. Då vi ännu minns att $x_1, x_2 \in D$ så har vi att:

$$0 < x_1 \leq x \leq x_2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 2$$

Eftersom $y \in R$ är trivialt kan vi alltså säga att $(x, y) \in D$ och således är D konvext.

5. Sök de punkter (x_0, y_0) för vilka paret av konstanta funktioner $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ löser systemet

$$x'(t) = x - xy$$
$$y'(t) = x^2 - x$$

av differentialekvationer. Tips: sätt $x'(t) = 0, y'(t) = 0$ och lös motsvarande ekvationer.

Lösning: Nu introduktion till kursens nästa ämne. System av D.E:n. I denna första uppgift så söker vi par av konstanta funtioner $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$. Vi följer tipset, om vi har en konstant funktion så är derivatan naturligtvis 0 så vi kan skriva om ekvationssystemet till:

$$\begin{cases} 0 = x_0 - x_0 y_0 = x_0(1 - y_0) \\ 0 = x_0^2 - x_0 = x_0(x_0 - 1) \end{cases}$$

Nu är detta helt enkelt ett ekvationssystem med 2 konstanta variabler. Det kan vi lösa och få:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow 0 \cdot (1 - y_0) = 0 \Rightarrow y_0 = c \quad c \in \mathbb{R} \\ x_0 = 1 \Rightarrow 1 \cdot (1 - y_0) = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \end{cases}$$

Dvs vi hitta 2 olika möjligheter. Om $x_0 = 0$ så kan y_0 vara vad som hellst. Om $x_0 = 1$ så är $y_0 = 1$.

6. Lös systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= x(t)y(t) - y(t) \end{aligned}$$

av differentialekvationer genom att först lösa $x'(t) = x(t)$.

Lösning: Nästa system att lösas. Vi följer tipset och köser först $x'(t) = x(t)$. Detta är en separerbar ekvation vars lösande borde vara relativt enkelt vid detta läge. Triviallösning som $x(t) = 0$. Resten:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \\ \int^x \frac{1}{s} ds &= \int^t 1 dj \\ \Longrightarrow x(t) &= Ce^t \end{aligned}$$

Märk specifikt att vi inte behöver förbjuda $C = 0$. Tillnäst sätter vi in detta svar i andra ekvationen och får:

$$y'(t) = Ce^t y(t) - y(t) = y(t)(Ce^t - 1)$$

En till separerbar ekvation. Triviallösning som $y(t) = 0$ Resten:

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t)(Ce^t - 1) \\ \int^y \frac{1}{s} ds &= \int^t (Ce^u - 1) du \\ \ln|y| &= Ce^t - t + C_2 \\ y(t) &= C_2^* e^{Ce^t - t} \end{aligned}$$

Här behöver vi inte heller förbjuda $C_2^* = 0$ p.g.a. triviala lösningen. Nu har vi alltså hittat paret:

$$\begin{cases} x(t) = Ce^t \\ y(t) = C_2^* e^{Ce^t - t} \end{cases}$$

Och eftersom vi inte i något skede i lösandet av andra ekvationen hamna begrönsa oss p.g.a. första ekvationen samt att vi löste andra ekvationen med alla av första ekvationens svar så har vi löst systemet fullständigt.