INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer II
Övning 1, Svarsförslag
17.3.2011
Jeremias Berg

1. Lös differentialekvationen

$$y'' = (y')^2$$

med substitutionen $y'(x) = z(x)$.

Lösning: Låt $f(x,y) = y^2$ då är den givna ekvationen av formen $y'' = f(x,y')$ genom att substituera $z(x) = y'(x)$ omvandlas den givna ekvationen till $z'(x) = f(x,z) = z^2$ vilket är en första ordningens D.E. Ekvationen är separerbar: dens triviala lösningar utgörs av $z(x) = y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C$. Resten av lösningarna fås genom separering av variablerna:

$$\begin{aligned} z' &= z^2 \\ \int^z \frac{1}{s^2}\,ds &= \int^x 1\,dt \\ -\frac{1}{z} &= x + C_1 \\ z = -\frac{1}{x+C_1} &\quad (x \neq -C_1) \end{aligned}$$

Nu kan vi lösa den orginala ekvationen genom att substituera tillbaka för y och lösa den nya ekvationen (som också är separerbar och inte har några triviallösningar) för y:

$$\begin{aligned} y' &= z = -\frac{1}{x+C_1} \\ y = \int^x -\frac{1}{s+C_1} ds &= -\ln|x+C_1| + C_2 \end{aligned}$$

Lösningarna utgörs alltså av:

$$y(x) = \begin{cases} C \\ C_2 - \ln|x+C_1| \quad (x \neq -C_1) \end{cases}$$

2. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

genom att först lösa $z = z(t)$ från $z' = \frac{f(t,z)}{z}$, där $f(y, y') = e^{2y}$, och därefter $y = y(x)$ från $y'(x) = z(y(x))$.

Lösning: Låt nu $f(x, y) = e^{2x}$. Då är givna ekvationen av formen $y'' = f(y, y')$ Den löses enligt tipset. Vi löser först: $z' = \frac{f(t,z)}{z} = \frac{e^{2t}}{z}$ för $z(t)$ Detta är en separerbar ekvation utan triviallösningar. Vi löser den tillnäst:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{e^{2t}}{z} \\ z'z &= e^{2t} \\ \int^z s ds = \int^t e^{2u} du \frac{z^2}{2} &= \frac{e^{2t}}{2} + C_1' \\ z(t)^2 &= e^{2t} + C_1 \end{aligned}$$

Nu skall vi näst lösa $y'(x) = z(y(x))$ då $z(y(x))^2 = e^{2y(x)} + C_1$ Först kan vi bestämma C_1

$$\begin{aligned} y'(x) = z(y(x)) \Leftrightarrow y'(x)^2 = z(y(x))^2 &= e^{2y(x)} + C_1 \\ y'(0) = 1 \Rightarrow y'(0)^2 = e^{2y(0)} + C_1 = e^{2\cdot 0} + C_1 = 1 + C_1 &= 1 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Nu eftersom $y'(0) = 1 > 0$ och $y'(x)$ är kontinuerlig så finns det enligt Analys 1 kursens resultat ett intervall I så att $0 \in \mathrm{I}$ och $y'(x) > 0 \, \forall x \in \mathrm{I}$. Åtminstone i detta intervall kan vi lösa ekvationen enligt följande:

$$\begin{aligned} y'(x)^2 = z(y(x))^2 &= e^{2y(x)} \\ x \in \mathrm{I} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{e^{2y(x)}} &= e^y \end{aligned}$$

Nu är detta en separerbar ekvation som vi löser tillnäst

$$\begin{aligned} & y' = e^y \\ & \int^y \frac{1}{e^s} ds = \int^x 1 dt \\ & -e^{-y} = x + C_2 \\ & y(0) = 0 \Rightarrow -e^0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -1 \\ & y(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad (x < 1) \end{aligned}$$

Så åtminstone i intervallet I är detta en lösning till uppgiftens D.E. Men med direkt räkning ser vi även att $y(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ satisfierar $y'(x)^2 = e^{2y(x)}$ i hela sitt definitionsområde. Således med stöd av entydighetssatsen så är $y(x)$ en lösning till uppgiftens ekvation $\forall x < 1$

3. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Lösning: Detta är en fjärde ordningens D.E med konstatna koefficienter. Vi kan använda samma metoder för att lösa den som vi kunde med andra ordningens D.E:n. Vi söker alltså ett fundamnetalsystem med hjälp av karakteristiska polynomet:

$$\begin{aligned} y^{(4)} - y = 0 \Rightarrow r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (r^2-1)(r^2+1) = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1, \quad r = \pm i \end{aligned}$$

Så fundamentalsystemet för ekvationen är $\{e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}$ och alla lösningar till D.E:n är av formen:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

4. Bilda motsvarigheten till Binets formel för de sk. Lucas talen y_n, $n \in \mathbf{N}$, som satisfierar differensekvationen

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = 2, y_1 = 1.$$

Tips: samma försök $y_n = r^n$, $n \in \mathbf{N}$, som för Fibonacci talen.

Lösning: Näst ett par uppgifter om saker som kanske verkar vara lite vid sidan om kursens väsentligaste material, rekursionsekvationer och partiella D.E:n. Precis som för fibonacci talen söker vi alltså en lösning $y_n = f(n)$ som inte är rekursivt definierad. Vi gör som uppgiften föreslår och försöker $y_n = r^n$.

$$\begin{aligned} y_n = r^n \Rightarrow y_{n+1} = r^{n+1} \Rightarrow y_{n+2} = r^{n+2} \\ r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0 \\ r^n \left(r^2 - r - 1\right) = 0 \\ r = 0,\ r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Från rötterna på den sista ekvationen får vi att den sökta lösningen är av formen $y_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Det som är värt att märkas är att hittills är lösandet av uppgiften inte olika till härledandet av Binets formel. Detta kommer ändras nu.

Nu använder vi nämligen de givna värdena för att lösa ut C_1 och C_2

$$2 = y_0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2$$

$$1 = y_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$$

Och den sökta formen på Lucastalen blir:

$$y_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Detta går även att verifiera genom t.ex induktionsbevis.

5. (a) Anta att $r_0 \in \mathbf{R}$ är en dubbelrot till ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. Verifiera att $x_n = C_1 r_0^n + C_2 n r_0^n$, $n \in \mathbf{N}$, löser differensekvationen $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ för alla konstanter $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. [Notera: $r_0 = -a/2, b = a^2/4$.]

   (b) Bilda en formel för den lösning till $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ för vilken $x_0 = 1, x_1 = 2$.

Lösning: Vi motiverar först det som uppgiften ber oss notera. Vi har alltså ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ vars lösningar r enligt formeln är

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

nu för att vi visste att r_0 är en dubbelrot så måste roten evalvueras till 0 om vi sätter in r_0 i lösningsformeln. Det som blir kvar är just vad vi håller på och motiverar.

$$r_0 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-a}{2}$$

$$0 = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2 - 4b}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = b$$

Nu går resten av uppgiften ut på att rätt så mekaniskt sätta in den givna formeln i differensekvationen och verifiera att den verkligen går ut. Märk raderna där vi använder faktumet att r_0 var en dubbelrot till $r^2 + ar + b = 0$ och således gäller $r_0^2 + ar_0 + b = 0$:

$$
\begin{aligned}
&x_n = C_1 r_0^n + C_2 n r_0^n \\
&x_{n+1} = C_1 r_0^{n+1} + C_2(n+1) r_0^{n+1} \\
&x_{n+2} = C_1 r_0^{n+2} + C_2(n+2) r_0^{n+2} \\
\Longrightarrow & C_1 r_0^{n+2} + C_2(n+2) r_0^{n+2} + a\left(C_1 r_0^{n+1} + C_2(n+1) r_0^{n+1}\right) + b\left(C_1 r_0^n + C_2 n r_0^n\right) = \\
& C_1\left(r^{n+2} + a r_0^{n+1} + b r_0^n\right) + C_2\left(n r_0^{n+2} + 2 r_0^{n+2} + a n r_0^{n+1} + a r_0^{n+1} + b n r^n\right) = \\
& C_1 r_0^n\left(r_0^2 + a r_0 + b\right) + C_2\left(n r_0^n\left(r_0^2 + a r_0 + b\right) + r_0^n\left(2 r_0^2 + a r_0\right)\right) = \\
& C_2 r_0^n\left(2 r_0^2 + a r_0\right) = \left(2\left(\frac{-a}{2}\right)^2 + a\frac{-a}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Vilket verifierar att givna ekvationen faktiskt är lösningen till givna differensekvationen.

Lösning för andra delen: Den givna ekvationen är av formen $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$ om $a = -2\, b = 1$ För att kunna använda första delens resutat måste vi försöka hitta en dubbelrot till $r^2 - 2r + 1$ Med lätt räkning ser vi att $r_0 = 1$ duger och då enligt första delen är $x_n = C_1 + nC_2$. Det som återstår är att sätta in givna initialvärden och lösa ekvationen för C_1 och C_2.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 = C_1 + 0 \cdot C_2 = C_1 \\
x_1 &= 2 = C_1 + C_2 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1
\end{aligned}
$$

Så den sökta formen för x_n är

$$x_n = 1 + n$$

6. Anta att $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är godtyckliga två gånger deriverbara funktioner i $\mathbb{R}$. Verifiera att funktionen $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, där $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, löser *vågekvationen*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ konstant.}$$

Lösning: Till sist ännu något som åter igen skiljer sig från vad vi hittills hållt på med, en partiell differential ekvation. Lösning av dessa är i allmänhet helt annorlunda till lösningen av ordinära D.E:n. Är man intresserad så finns det t.o.m. ett par kurser för detta på magistersnivå. Nu måst vi dock inte lösa D.E;n men istället bara verifiera en lösning. Vi gör detta genom att räkna ut båda sidorna av ekvationen skillt och verifiera att de blir samma sak. Teorin bakom hur man deriverar sånahär funtioner hör inte direkt till kurssen, men det man måst göra är att definiera ett par hjälpfunktioner och sedan använda kedjeregeln. Kursen vektoranalys går igenom detta noggrannare.

Låt

$$a(x,t) = x + ct, \quad b(x,t) = x - ct$$

Då blir $u(x,t) = f(a) + g(b)$ Nu kan vi söka de partiella derivatorna. Vi börjar med ekvationens vänstra led.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(a,b)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial u(a,b)}{\partial b} + \cdot \frac{\partial b}{\partial t} =$$
$$\frac{\partial (f(a)+g(b))}{\partial a} \cdot c + \frac{\partial (f(a)+g(b))}{\partial b} + \cdot (-c)$$
$$c\left(\frac{\partial f(a)}{\partial a} - \frac{\partial g(b)}{\partial b}\right)$$

Det sista håller eftersom $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ var 1 variabels funktioner så

$$\frac{\partial f(a)}{\partial b} = \frac{\partial g(b)}{\partial a} = 0$$

Nu kan vi följa samma idé och derviera igen.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial a} - \frac{\partial g(b)}{\partial b}\right) =$$
$$c\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2} \cdot \frac{\partial b}{\partial t}\right) =$$
$$c^2\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}\right)$$

Sen har vi ännu kvar andra sidan av ekvationen:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(a,b)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u(a,b)}{\partial b} + \cdot \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial f(a)}{\partial a} + \frac{\partial g(b)}{\partial b}$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 g(b)}{\partial b^2}$$

Idén är alltså helt samma, så jag har inte skrivit upp alla mellansteg. Men detta visar att $u(x,t)$ uppfyller ekvationen.