Differentialekvationer II
Räkneövning 5
14.4. 2011

1. Lös det lineära homogena DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t). \end{aligned}$$

2. Sök allmänna lösningen till DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t).$$

3. Låt $\alpha > 0$, $\beta > 0$ vara konstanter. DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\alpha y_2(t) \\ y_2'(t) &= -\beta y_1(t) \end{aligned}$$

beskriver antalet bakterier $y_1(t)$ och $y_2(t)$ vid tiden $t \geq 0$ i en population där bakteriearterna förtär varandra utan att förökas. Hur förhåller sig $y_1(0)$ och $y_2(0)$ till varandra om vi vet att $y_1(t) > 0$ och $y_2(t) > 0$ för varje $t \geq 0$?

4. Sök allmänna lösningen till DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t).$$

Tips: karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$.

5. Sök alla lösningar till DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t). \end{aligned}$$

6. Lös initialvärdesproblemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{y}(t), \quad \overline{y}(0) = (1, 1, 1)^T.$$

Kursprovet ordnas måndag 2.5 kl 13-15 (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). Alternativt provtillfälle arrangeras vid behov (tag kontakt). Snabb genomgång av provområdet onsdag 20.4.

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 5
14.4. 2011

1. Ratkaise homogeeninen lineaarinen DY-systeemi

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t). \end{aligned}$$

2. Etsi yleinen ratkaisu DY-systeemille

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t).$$

3. Olkoot $\alpha > 0$, $\beta > 0$ vakioita. DY-systeemi

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\alpha y_2(t) \\ y_2'(t) &= -\beta y_1(t) \end{aligned}$$

mallintaa eräässä populaatiossa bakteerien lukumäärät $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ hetkellä $t \geq 0$, missä bakteerikannat syövät toisiaan lisääntymättä. Miten $y_1(0)$ ja $y_2(0)$ suhtautuvat toisiinsa, jos $y_1(t) > 0$ ja $y_2(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$?

4. Etsi yleinen ratkaisu DY-systeemille

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t).$$

Vihje: karakteristinen polynomi on $p(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$.

5. Etsi kaikki ratkaisut DY-systeemille

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t). \end{aligned}$$

6. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{y}(t), \quad \overline{y}(0) = (1, 1, 1)^T.$$

Kurssikoe järjestetään maanantaina 2.5 klo 13-15 (samalla *Geometrin* kurssikoe). Vaihtoehtoinen koetilaisuus tarvittaessa (ota yhteys luennoijaan). Katsaus koealueeseen keskiviikkona 20.4.