INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer I
Övning 4, Svarsförslag
17.2.2011
Jeremias Berg

1. Sök ekvationen för den kurva $y = y(x)$ som har följande egenskap: tangenten till kurvan i punkten (x_0, y_0) skär x-axeln i punkten $(x_0 + kx_0^2, 0)$, där $k > 0$ är en konstant, och kurvan löper genom punkten $(1, e)$.

   Lösning: Vi börjar med att härleda differentialekvationen som leder till uppgiftens svar.

   Vi söker alltså ekvationen av någon kurva. Låt oss kalla den $f(x)$. Nu från uppgiften får vi veta en hel del om tangeten till kurvan vid en viss punkt. Vi undersöker nu en punkt (x_0, y_0). Tangeten till den sökta kurvan vid denna punkt har samma riktnings koeficient som kurvan själv. Om riktningskoeficienten är m så har vi alltså $f'(x_0) = m$. Sen får vi ännu från uppgiften att om en tangent passerar punkten(x_0, y_0) så skär den x-axeln vid $(x_0+kx_0^2, 0)$ vi har alltså hittat 2 olika punkter som tangenten passerar. Nu när vi ännu kommer ihåg från t.ex. gymnasiet att om vi har 2 olika punkter på en rak linje kan vi skriva riktningskoeficienten som $m = \dfrac{\delta y}{\delta x}$ så har vi alltså härlett följande samband:

   $$f'(x_0) = m = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_0 - 0}{(x_0 - (x_0 + kx_0^2)} = \frac{y_0}{(-kx_0^2)}$$

   Eftersom de givna sambanden skulle gälla för alla punkter på kurvan kan vi "glömma bort" indexena. Härmed har vi reducerat sökandet av $f(x)$ till att lösa följande dif. ekvation:

   $$f'(x) = -\frac{y}{(kx^2)}$$

   Detta är en separerbar ekvation. Den har triviallösningar vid $y(x) = 0$ vi hittar resten genom att separera variablerna: (och minnas att $k > 0$ är konstant).

   $$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{y}{(kx^2)} \Rightarrow -\int^y \frac{1}{s}\,ds = \int^x \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{u^2}\,du \Rightarrow \\ -\ln|y| = -\frac{1}{k}\frac{1}{x} + C \\ y = C_1 e^{\frac{1}{kx}} \end{aligned}$$

   Nu så vet vi ännu från uppgiften att den sökta ekvationen paserar $(1, e)$ Detta ger oss alltså kravet $f(1) = e$ vilket vi kan använda för att lösa C

   $$f(1) = e \Rightarrow e = Ce^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow C = e^{\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

Så den sökta lösningen $f(x)$ blir:

$$f(x) = e^{\left(1-\frac{1}{k}\right)} e^{\frac{1}{kx}} = e^{\left(\frac{kx-x+1}{kx}\right)}$$

2. Lös differentialekvationen

$$y'(y'-x) = y(y-x).$$

Tips: gruppera om termerna, samt använd att $(y')^2 - y^2 = (y'-y)(y'+y)$.

Lösning: Vi börjar med att manipulera den givna ekvationen.

$$\begin{aligned} y'(y'-x) = y(y-x) \Leftrightarrow (y')^2 - y'x = y^2 - yx \Leftrightarrow \\ (y')^2 - y^2 = y'x - yx \Leftrightarrow (y'+y)(y'-y) = x(y'-y) \Leftrightarrow \\ (y'+y)(y'-y) - x(y'-y) = \Leftrightarrow (y'-y)(y'+y-x) = 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y'-y=0 \\ y'+y-x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Obs! Det skulle även ha gått att dividera bort $(y'-y)$ då borde man dock ha förbjudit $y = y'$ och undersökt dessa skilt Dessa ger också ett antal lösningar vilket kommer att visas.

Nu har vi alltså reducerat lösningarna för den givna ekvationen till 2 olika lösningsskaror. $y_1(x)$ och $y_2(x)$ vi löser båda enskillt. $y - y' = 0$ är en separerbar ekvation vars triviallösningar utgörs av $y(x) = 0$. Resten av lösningarna $y_1(x)$ är:

$$\begin{aligned} y'-y=0 \Leftrightarrow y'=y \Rightarrow \\ \int^y \frac{1}{s}\,ds = \int^x 1\,du \Rightarrow \\ \ln|y| = x + C_0 \Leftrightarrow y = Ce^x \end{aligned}$$

Den andra skarans ekvation $y' + y - x = 0 \Leftrightarrow y' + y = x$ är linjär. Vi löser den med homogena/varierande av konstant metoden

Lösandet av motsvarande homogena

$$\begin{aligned} y'+y=0 \Leftrightarrow y'=-y \\ \int^y \frac{1}{s}\,ds = \int^x -1\,du \\ \ln|y| = -x + C_0 \Leftrightarrow y = Ce^{-x} \end{aligned}$$

Varierande av konstant

$$\begin{aligned} y(x) = C(x)e^{-x} \Rightarrow y'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} \\ \Longrightarrow C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = x \Leftrightarrow C'(x) = xe^x \end{aligned}$$

Vilket man kan integrera genom partiell Integrering.

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Nu kan vi lösa utrycket för $C(x)$ och sedan sätta in det i homogena ekvationens svar för att få fullständiga ekvationens svar.

$$C'(x) = xe^x \Rightarrow C(x) = \int^s xe^x = e^x(x-1) + C$$
$$\Longrightarrow y(x) = (e^x(x-1) + C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}$$

Nu har vi alltså hittat de två lösningsskarorna som uppfyller uppgiftens ekvation.

$$y'(y'-x) = y(y-x) \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = Ce^x \\ y_2(x) = x - 1 + Ce^{-x} \end{cases}$$

Extra observeringar: För själva uppgiftens lösning räcker det som står ovan. Men i detta fall finns även lite fler lösningar. Vi undersöker båda skarorna vid punkten $x = 1$ Vi väljer t.ex. $C_1 = \frac{1}{2e}$ och $C_2 = \frac{e}{2}$

$$x = 1 \Rightarrow y_1(x) = C_1 e^1 = \frac{e}{2e} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + \frac{e}{2e} = 1 - 1 + C_2 e^{-1} = y_2(x)$$

Dessutom så gäller:

$$x = 1 \Rightarrow y_1'(x) = \frac{1}{2e} e^1 = 1 - \frac{e}{2} e^{-1} = y_2'(x)$$

Dvs. kurvorna tangerar varandra kontinuerligt. Nu är det inte svårt att visa att t.ex:

$$y_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e} e^x & x \leq 1 \\ x - 1 + \frac{e}{2} e^{-x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Är kontinuerlig, deriverbar och uppfyller givna ekvationen. Dvs. det går även att ”byta”mellan $y_1(x)$ och $y_2(x)$ på såna punkter där kurvorna tangerar varandra och derivatorna har samma värde. På denna sätt uppstår mer lösningar vars behandling dock inte krävdes för denna uppgift.

3. Sök en approximation med Eulers metod med steglängden $h = \frac{1}{4}$ till värdet $y(1)$ för lösningen $y = y(x)$ av initialvärdesproblemet

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2.$$

Lösning: Så länge som man förstår idérna till hur och varför Eulers metod fungerar så går denna uppgift enbart ut på att jobba som en dator. Eftersom det var rätt så många på räkneövningen som förstod metoden så tänker jag inte här skriva ut för detaljrikt. Låt $f(x, y) = y' = y - x$ Nu har vi alltså $y_0 = 2, x_0 = 0$ och $h = 0.25$ Nu från kompendiet så får vi algoritmen:

$$\begin{cases} x_{(n+1)} := x_n + h \\ y_{(n+1)} = y_n + hf(x, y) \end{cases}$$

Nu när vi aplicerar denna på våra initialvärden tills vi kommer till $x = 1$ så får vi alltså:

n	x_n	y_n
0	0	2
1	$\frac{1}{4}$	2.5
2	$\frac{1}{2}$	≈ 3.0625
3	$\frac{3}{4}$	≈ 3.7031
4	1	≈ 4.441

Uppgiftens ekvation skulle inte heller vara särkillt svår att lösa. Lösningen blir $f(x) = e^x + 1 + x$ och $f(1) \approx 4.7182$ Den intresserade läsaren kan fundera på varför skilldnaderna i metodernas svar är rätt så stor.

4. Lös differentialekvationen

$$(y')^2 + 2y'y'' = 0$$

genom att substituera $w(x) = y'(x)$.

Lösning: Vi börjar med att substituera enligt tipset

$$\begin{aligned} w(x) = y'(x) &\Rightarrow y''(x) = w'(x) \\ \Longrightarrow w(x)^2 &+ 2w(x)w'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ w'(x) = -\frac{w(x)}{2} & \quad \text{för } w(x) = y'(x) \neq 0 \Rightarrow y(x) = C \end{aligned}$$

Så som märks så dividerar vi med $w(x)$ då faller lösningarna där $w(x) = 0$ vilka trivialt upfyller ekvationen. Nu har vi reducerat den givna ekvationen till en första ordningens separerbar ekvation. Dens triviala lösningar skulle vara $w(x) = 0$ vilka redan tidigare konstaterades vara triviallösningar för givna ekvationen också. För att få resten av lösningarna separerar vi variablerna.

$$\begin{aligned} w'(x) &= -\frac{w(x)}{2} \Rightarrow \\ \int^w \frac{1}{s}\, ds &= \int^x -\frac{1}{2}\, ds \Rightarrow \\ \ln|w| = -\frac{1}{2}x + C_0 &\Leftrightarrow w = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

Nu för att hitta lösningarna för $y(x)$ substituerar vi tillbaka. Den resulterande ekvationen är direkt integrerbar:

$$\begin{aligned} &w(x) = y'(x) \\ \Longrightarrow &y'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow y(x) = -2C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 = C' e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 \end{aligned}$$

Vilka alltså är lösningarna på givna ekvationen. Som förväntat så har vi 2 okända variabler i lösningarna för en andra gradens D.E. Märk att vi inte behöver förbjuda $C = 0$ Detta p.g.a. att vi specifikt visade att dessa är de triviala lösningarna.

5. Beräkna Wronskis determinant $W(y_1, y_2)$ för följande par $\{y_1, y_2\}$ av funktioner:

$$(i)\ (x, x^2), \qquad (ii)\ (e^{2x}, xe^{2x}).$$

Kan paret (x, x^2) bilda ett fundamentalsystem av lösningar till en lineär differentialekvation av 2. ordningen på hela $\mathbf{R}$?

Lösning: Uppgiften är i princip bara beräkning. Formeln för en Wronskis determinant ges på sidan 46. I kompendiet:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)$$

Vi använder detta på de givna ekvationsparen:

i)

$$W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x2x - 1x^2 = x^2$$

ii)

$$\begin{aligned} W(e^{2x}, xe^{2x}) &= \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{2x}\left(2xe^{2x} + e^{2x}\right) - xe^{2x}2e^{2x} \\ &= e^{4x}(2x+1) - e^{4x}2x = e^{4x}(2x + 1 - 2x) = e^{4x} \end{aligned}$$

Nu för att ett par av funktioner $\{y_1, y_2\}$ skall bilda ett fundamentalsystem till en lineär differentialekvation av 2. ordningen på hela $\mathbf{R}$ så måste $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}$ Nu eftersom $W(x, x^2) = 0$ för $x = 0$ så är svaret på följdfrågran nej! (x, x^2) kan inte bilda ett fundamentalsystem i hela $\mathbb{R}$. nog i alla andra punkter förutom 0, men inte i hela $\mathbb{R}$ Däremot är $W(e^{2x}, xe^{2x}) = e^{4x} > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$ Så det paret kan.

6. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0$$

med reducering av ordningen, då $y(x) = x$ utgör en lösning.

Lösning: Eftersom $x > 0$ kan vi skriva om givna ekvationen som:

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$$

Nu för att hitta lösningarna till denna diff. ekvation så måste vi hitta 2 olika lösningar som tillsammans utgör ett fundamentalsystem. Formeln som ger den andra lösningen finns på sidan 48. Men som vanligt är det effektivare att förstå metoder och idér istället för att blint plugga formler. Så nu presenterar jag metoden för att härleda andra lösningen.

Kravet för att två lösningar $\{y_1(x), y_2(x)\}$ skall utgöra ett fundamentalsystem är som nämnt i upg. 5 att $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}$ Nu har vi redan en lösning $y(x) = x$ och kan med hjälp av den och tekniken som presenteras i exempel 3.9 på sidan 47 i kompendiet söka den andra. Låt nu $y_2(x) = f(x)y_1(x) = xf(x)$ för någon funktion $f \neq 1$. Nu vill vi undersöka för en hurudan funktion f $y_2(x)$ utgör en lösning till uppgiftens ekvation. Vi märker först att:

$$\begin{cases} y_2(x) = xf(x) \\ y_2'(x) = f(x) + f'(x)x \\ y_2''(x) = f'(x) + f''(x)x + f'(x) = 2f'(x) + f''(x)x \end{cases}$$

Nu för att hitta på hurudana f som uppfyller ekvationen substituerar vi helt enkelt in detta i den givna ekvationen och försöker lösa f

$$\begin{aligned} & y_2'' + \frac{2}{x}y_2' - \frac{2}{x^2}y_2 = 0 \\ \Longrightarrow & (2f'(x) + f''(x)x) + \frac{2}{x}\left(f(x) + f'(x)x\right) - \frac{2}{x^2}xf(x) = 0 \Leftrightarrow \\ & 2f'(x) + f''(x)x + \frac{2}{x}f(x) + \frac{2}{x}f'(x)x - \frac{2}{x}f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ & 2f'(x) + f''(x)x + 2f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4f'(x) + f''(x) = 0 \end{aligned}$$

Som märks har vi reducerat problemet till en ekvation med bara $f'(x)$ och $f''(x)$ nu kan vi använda en liknande substitution som i upg. 4 för att lösa denna för f. Låt $h(x) = f'(x)$ då vi gör denna substitution så kommer vi att få en första ordningens separerbar ekvation som vi löser med samma.

OBS! Under lösningen av först $h(x)$, $f(x)$ och ännu $y_2(x)$ så kommer vi i stegen där det uppkommer konstanter att välja dom "lättaste"konstanterna för fortsatt räkning. Detta är motiverat eftersom de fullständiga löningarna till givna D.E:n utgörst av linjära kombinationer till de sökta 2 svaren. Dvs. vi tappar inte bort några svar genom att välja lätta konstanter nu, eller t.o.m inte fast vi gör andra linjära transformationer. Svaren "uppkommer"igen i slutet.

$$
\begin{aligned}
4h(x) + h'(x) = 0 \Leftrightarrow h'(x) = -4h(x) \Rightarrow \\
\int^h \frac{1}{s}\, ds = -\int^x 4u\, du \Rightarrow \ln|h| = -4\ln|x| + C \Rightarrow \\
\ln|h| = \ln\frac{C}{|x|^4} \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^4} \Rightarrow \\
f(s) = \int^s h(x)\, dx = -\frac{1}{3x^3} + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} \\
y_2(x) = xf(x) = \frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Nu har vi då hittat den andra lösningen till ekvationen. En simpel substitution av y_2 in i uppgiftens ekvation visar att det faktiskt är en lösning. Då vi ännu räknar att:

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2) = W\left(x, \frac{1}{x^2}\right) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x^2} \\ 1 & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = \\
-x\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \cdot 1 = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{3}{x^2} \neq 0 \text{ för } x > 0
\end{aligned}
$$

Så har vi alltså visat att $\{x, \frac{1}{x^2}\}$ utgör ett fundamentalsystem för givna ekvationen. Alltså är alla lösningar till ekvationen av formen:

$$
y(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}
$$