INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer I
Övning 3, Svarsförslag
10.2.2011
Jeremias Berg

1. Lös den lineära differentialekvationen

$$y' + xy = xe^{x^2}. \tag{1}$$

Lösning: Eftersom ekvationen är linjär så kan vi lösa den antingen via en integrerande faktor eller ”varierande av konstanten”. Vi löser den med hjälp av varierande av konstanten.

Steg 1. Lösandet av motsvarande homgena ekvation Först söker vi en allmän lösning till uppgiftens motsvarande homogena ekvation. Dvs. vi vill lösa $y' + xy = 0$. Denna ekvation är separerbar och lösandet borde så småningom börja vara rutinarbete. Lösningarna hittas via separering av variabler:

$$\begin{aligned} y' + xy = 0 \Rightarrow y' &= -xy \Leftrightarrow \\ \int^y \frac{1}{s} ds &= \int^x -u\, du \Leftrightarrow \\ \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow \\ y &= Ce^{-\frac{x^2}{2}} \quad (C = e^{\pm C_1}) \end{aligned} \tag{2}$$

Steg 2. Varierade av konstanten Till näst så vill vi hitta en specifik lösning till givna ekvationen. Denna lösningsmetod var kanske aningen oklar för vissa ännu under förra räkneövningen så jag kommer att förklara detta lite noggrannare än vad som skulle behövas för uppgiften. Förklarningen är inte fullständigt formell och är lite av ett alternativt sett att se på metoden. Formella motiveringarna för tekniken kan hittas i t.ex. kompendiet sats 1.20 - 1.21 på sidan 19.

Baserat på steg 1 vet vi alltså att $f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f'(x) + xy = 0$ men uppgiften vi håller på och löser kräver att vi hittar sådana $f(x)$ för vilka $f'(x)+xy = xe^{x^2}$. Därför tar vi nu och modifierar C i (2) genom att byta ut den mot en funktion på $x, C(x)$ och undersöka för hurudana funktioner $C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ upfyller det givna problemet (1). Låt alltså $C(x)$ vara en funktion av x.

Då är $y(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ en lösning till givna problemet (1) om:

$$\begin{aligned}
& y(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y'(x) = C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}C(x) \\
\text{Insätter detta in i (1)} \Longrightarrow & C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}C(x) + x\left(C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = xe^{x^2} \Leftrightarrow \\
& C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow C'(x) = xe^{-\frac{3x^2}{2}} \Leftrightarrow \\
& 3C'(x) = 3xe^{\frac{3x^2}{2}} \Leftrightarrow \int^x 3C'(s)\,ds = \int^x 3ue^{\frac{3u^2}{2}}\,du \Leftrightarrow \\
& 3C(x) = e^{\frac{3x^2}{2}} + C \Leftrightarrow C(x) = \frac{e^{\frac{3x^2}{2}} + C}{3}
\end{aligned}$$

Den fullständiga lösningen fås nu genom att insätta denna funktion $C(x)$ i lösningen till homogena ekvationen (2). De sökta lösningarna är alltså

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{(e^{\frac{3x^2}{2}} + C)}{3} = \frac{e^{x^2}}{3} + C'e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \left(C' = \frac{C}{3}\right)$$

Obs! Från och med nu kommer veckans uppgifter främst att handla om olika substitutioner och andra ”trick”man kan använda på vissa typer av diff. ekvationer för att omvandla dem till någon av formerna vi redan kan lösa (separerbara, exakta eller linjära). Viktigaste i dessa uppgifter enligt mig är att känna igen vad det är för typs ekvation och veta vad som måst göras åt den för att göra den lösbar. Själva lösandet av den omvanlade ekvationen kommer naturligtvis också att presenteras, men inte nödvändigtvis i lika stor detalj som tidigare.

2. Lös differentialekvationen

$$xyy' = x^2 + y^2.$$

Lösning: Vi märker först att:

$$xyy' = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (\text{ då } x \neq 0,\ y \neq 0)$$

Detta är en ekvation av formen $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ då $f(u) = u^{-1} + u$. Dvs. en ekvation som beskrivs i stycke 1.5.1 i kompendiet.

Tips för att känna igen ekvationer av detta slag. Om man har en dif. ekvation av formen: $y'(x) = g(x, y)$ och för detta g gäller $g(Cx, Cy) = g(x, y)$ $\forall C \in \mathbb{R}$ så är ekvationen av detta slag. I denna uppgift låter vi alltså $g(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ och märker att $\forall C_0 \in \mathbb{R}$ är:

$$g(C_0x, C_0y) = \frac{C_0x}{C_0y} + \frac{C_0y}{C_0x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = g(x, y)$$

Nu för att omvandla den givna ekvationen till separerbar följer vi exemplet i kapitlet 1.5.1 och substituerar enligt följande:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} v(x) := \frac{y}{x} \Rightarrow x(v(x)) = y \\ y'(x) = v(x) \cdot 1 + v'(x)x \end{cases} \\
\Longrightarrow &y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\
&v(x) + v'(x)x = (v(x))^{-1} + v(x) \Rightarrow \\
&v'(x)x = \frac{1}{v(x)}
\end{aligned}$$

Den sista ekvationen är separerbar (låt $p(x) = \dfrac{1}{x}$ och $q(v) = \dfrac{1}{v}$). Ekvationen har inga triviallösningar. Vi separerar variablerna för att lösa den.

$$\begin{aligned}
v'(x) = \frac{1}{xv} \Rightarrow \int^{v} u\, du = \int^{x} \frac{1}{s}\, ds \Rightarrow \\
\frac{v^2}{2} = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \\
v = \pm\sqrt{2\ln|x| + C_2} \quad (C_2 = 2C_1\ C_2 > -2\ln|x|)
\end{aligned}$$

Nu kan vi substituera tillbaka för att få de sökta lösningarna på y

$$\begin{aligned}
&v = \pm\sqrt{2\ln|x| + C} \\
&y(x) = v(x)x \\
\Longrightarrow &y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C} \quad (y(x) \neq 0)
\end{aligned}$$

3. Lös differentialekvationen

$$y' = (x - y + 1)^2$$

med hjälp av substitutionen $w(x) = x - y(x) + 1$.

Lösning: Nästa typ av ekvation beskrivs i kap 1.5.2. Låt $G(u) = u^2 \quad a = 1,\ b = -1,\ c = 1$ då är den givna ekvationen av formen $y' = G(ax+by+c)$. Nu om man läser igenom argumenteringen (i kap. 1.5.2. i kompendiet) för den substitution vi kommer att göra till näst så märker man ganska snabbt att existensen av ett c inverkar inte på slutsatsen av argumenteringen eller på att den resulterande diff. ekvationen skulle vara separerbar. Så det vi gör här är egentligen precis samma som i kap. 1.5.2.

$$\begin{aligned}
&w(x) := x - y(x) + 1 \\
&w'(x) = 1 - y'(x) \Rightarrow y' = 1 - w'(x) \\
\text{Insättning i givna ekvationen } \Longrightarrow &1 - w'(x) = w(x)^2 \Leftrightarrow w' = 1 - w^2
\end{aligned}$$

Vi har nu omvandlat givna ekvationen till en separerbar. Den, och som en följd också uppgiftens orginal ekvation, har en triviallösning $w(x) = 1 \Rightarrow x - y(x) + 1 = 1 \Rightarrow y(x) = x$. Resten hittas som känt genom separering av variabler:

$$w' = 1 - w^2 \Rightarrow$$
$$\int^w \frac{1}{1-s^2}\, ds = \int^w \frac{1}{(1-s)(1+s)}\, ds = \int^x 1\, du$$

Att integrera västra sidan kräver partiell bråkuppdelning:

$$\frac{1}{(1-s)(1+s)} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{1-s} = \frac{A(1-s) + B(1+s)}{(1-s)(1+s)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(1-s) + B(1+s) = 1$$
$$s = \mp 1 \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

Nu kan vi fortsätta med lösningen av uppgiften:

$$\int^w \frac{1}{1-s^2}\, ds = \frac{1}{2}\left(\int^w \left(\frac{1}{(1-s)} + \frac{1}{(1+s)}\right) ds\right) = \int^x 1\, du \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\left(-\ln|1-w| + \ln|1+w|\right) = x + C \Leftrightarrow$$
$$\ln\left|\frac{1+w}{1-w}\right| = 2x + C_2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1+w}{1-w} = C_3 e^{2x} \Leftrightarrow 1 + w = C_3 e^{2x}(1-w) \Leftrightarrow$$
$$w = \frac{C_3 e^{2x} - 1}{C_3 e^{2x} + 1}$$

Nu har vi löst den omvandlade ekvationen. Märk att vi inte behöver förbjuda $w(x) = 1$ som en lösning på dif. ekvationen eftersom det är den triviala lösningen.

Nu för att hitta lösningarna på orginala dif. ekvationen substituerar vi tillbaka:

$$w(x) = x - y(x) + 1 \Rightarrow$$
$$x - y(x) + 1 = \frac{C_3 e^{2x} - 1}{C_3 e^{2x} + 1} \Rightarrow$$
$$y(x) = x + 1 - \frac{C_3 e^{2x} - 1}{C_3 e^{2x} + 1} = x + 1 - \frac{C_3 e^{2x} + 1 - 2}{C_3 e^{2x} + 1} \Rightarrow$$
$$y(x) = x + 1 - \left(\frac{C_3 e^{2x} + 1}{C_3 e^{2x} + 1} - \frac{2}{C_3 e^{2x} + 1}\right) = x + \frac{2}{C_3 e^{2x} + 1}$$

4. Lös differentialekvationen
$$y' = \frac{x+y-1}{x-y+3}$$
med hjälp av den metod som beskrivs i kapitel 1.5.3 i kompendiet.

Lösning: Låt $f(x) = x$ då är den givna ekvationen av formen $y'(x) = f\left(\frac{1\cdot x + 1\cdot y + (-1)}{1\cdot x + (-1)\cdot y + 3}\right)$.
Dvs. av typen som beskrivs i kap. 1.5.3. i kompendiet. Lösningen av dessa går ut på att vi byter ut variablerna x och y mot några andra för att försöka bli av med de konstanta termerna i både täljaren och nämnaren. Då blir nämligen ekvationen likgradig och kan lösas som upg. 2. Låt alltså

$$\begin{cases} x = u + a_0 & a_0 \in \mathbb{R} \\ y = v + b_0 & b_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow v' = \frac{(u+a_0)+(v+b_0)-1}{(u+a_0)-(v+b_0)+3} = \frac{u+v+(a_0+b_0-1)}{u-v+(a_0-b_0+3)}$$

Nu ville vi alltså att den konstanta termen i både täljaren och nämnaren är 0. Så till näst väljer vi a_0 och b_0 så att de är lösningarna till följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 - 1 = 0 \\ a_0 - b_0 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ b_0 = 2 \end{cases}$$

Vi har alltså omvandlat vår orginala ekvation till:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v+(-1+2-1)}{u-v+(-1-2+3)} = \frac{u+v}{u-v} = \frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}$$

Denna ekvation är av typen som beskrivs i kap 1.5.1. Märk att $\dfrac{1+\frac{C_0 v}{C_0 u}}{1-\frac{C_0 v}{C_0 u}} = \dfrac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}} \quad \forall C_0 \in \mathbb{R}$.

Vi löser denna med samma metod som i önv. 2: genom att substituera på följande vis:

$$w(u) := \frac{v(u)}{u} \Rightarrow v(u) = w(u)u \Rightarrow \frac{dv}{du} = w'u + w$$
$$\Longrightarrow w'u + w = \frac{1+w}{1-w} \Rightarrow w'u = \frac{1+w^2}{1-w}$$

Denna ekvation är separerbar för $w \neq 1$ Vi löser den till näst:

$$\int^w \left(\frac{1-s}{1+s^2}\right) ds = \int^u \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow$$
$$\int^w \left(\frac{1}{1+s^2} - \frac{s}{1+s^2}\right) ds = \int^u \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow$$
$$\arctan w - \frac{1}{2}\ln\left|1+w^2\right| = \ln|u| + C \Rightarrow$$
$$2\arctan w - \ln\left|1+w^2\right| = \ln\left(C_2|u|^2\right) = \ln\left(C_2 u^2\right) \quad C_2 = 2e^C$$

Som märks är ekvationen inte direkt trivial att lösa explicit. Därför nöjer vi oss med att substituera tillbaka båda våra substitueringar för att forma utrycket för x och y.

$$
\begin{aligned}
&w(u) := \frac{v(u)}{u} \\
\Longrightarrow & 2\arctan\frac{v(u)}{u} - \ln\left|1 + \left(\frac{v(u)}{u}\right)^2\right| = \ln\left(C_2 u^2\right) \\
&\begin{cases} x = u - 1 \Rightarrow u = x + 1 \\ y = v + 2 \Rightarrow v = y - 2 \end{cases} \\
\Longrightarrow & 2\arctan\left(\frac{y-2}{x+1}\right) - \ln\left|1 + \left(\frac{y-2}{x+1}\right)^2\right| = \ln\left(C_2 (x+1)^2\right) \\
&w \neq 1 \Rightarrow u \neq v \Rightarrow y \neq x + 3
\end{aligned}
$$

Enligt mig är det svåra med denna uppgift att hålla reda på olika variablen som uppstår under de olika stegen i de olika substitutionerna. Dock är det viktigaste även i denna uppgift att känna igen denna typ av ekvationer och förstå idén i hur man löser dem. Genom att byta ut variablerna så att konstanta termerna i täljaren och nämnaren försvinner och sedan använda metoden för att lösa likgradiga ekvationer

5. Lös initialvärdesproblemet

$$y' + y = xy^3, \quad y(0) = 2,$$

för en ekvation av Bernoulli typ.

Lösning: Vi följer tekniken som beskrivs i kap. 1.5.4 i kompendiet. Låt $p(x) = 1, q(x) = x$ och $\lambda = 3$. Då är:

$$y' + y = xy^3 \Leftrightarrow y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^\lambda$$

Dvs. uppgiften är alltså av Bernoulli typ. Idén med metoden vi använder för att lösa dessa är att vi försöker omvandla ekvationen till lineär genom att först dividera bort y^λ termen. Då vi gör detta mister vi också svaren för vilka $y = 0$ någonstans. Desutom så måste vi konstaterna att $y \equiv 0$ är en trivial lösning för alla ekvationer av denna typ.

Nu kan vi omvandla problemet till linjär genom:

$$y' + y = xy^3 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x \text{ för } y \neq 0$$

$$\begin{cases} v(x) := \dfrac{1}{y^2} \\ v'(x) = -\dfrac{2y'}{y^3} \Rightarrow y' = -\dfrac{v'y^3}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{-\frac{v'y^3}{2}}{y^3} + v = x \Leftrightarrow -\frac{v'}{2} + v = x$$

Denna ekvation är linjär, vi löser den genom att först lösa motsvarande homogena ekvation och sedan variera konstanten.

Homogena:

$$\begin{aligned} -\frac{v'}{2} + v = 0 \Leftrightarrow v' = 2v \Rightarrow \\ \int^v \frac{1}{s}\, ds = \int^x 2\, dt \Rightarrow \\ \ln|v| = 2x + C_1 = \ln(C_2 e^{2x}) \Rightarrow \\ v = Ce^{2x} \quad C = \pm C_2 \end{aligned}$$

Varierande av konstant:

$$\begin{cases} y(x) = C(x)e^{2x} \\ y'(x) = C'(x)e^{2x} + 2e^{2x}C(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow -\frac{C'(x)e^{2x} + 2e^{2x}C(x)}{2} + C(x)e^{2x} = x \Leftrightarrow C'(x) = \frac{-2x}{e^{2x}}$$

Det sista kommer att kräva en partiell integrering. Låt $g(x) = -2x$ och $f(x) = -\dfrac{1}{2e^{2x}}$
Nu är:

$$\int^x \left(\frac{-2s}{e^{2s}}\right) ds = -2x \cdot -\frac{1}{2e^{2x}} - \int^x -2 \cdot -\frac{1}{2e^{2s}}\, ds$$

$$= \frac{x}{e^{2x}} - \int^x \frac{1}{e^{2s}}\, ds = \frac{x}{e^{2x}} + \frac{1}{2e^{2x}} + C = \frac{1}{e^{2x}}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C$$

Nu kan vi fortsätta med lösandet av problemet:

$$C'(x) = \frac{-2x}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int^x \left(\frac{-2s}{e^{2s}}\right) ds = \frac{1}{e^{2x}}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C$$

Nu substituerar vi in detta i homogena ekvationens lösning för att få fullständiga lösningarna för först $v(x)$ och sedan byta tillbaka för lösningarna för $y(x)$.

$$v(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C\right) = x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}$$

$$\frac{1}{y^2} = v(x) = x+\frac{1}{2}+Ce^{2x} \Rightarrow$$

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}\right)}}$$

Vi har ännu I.V.P:n kvar:

$$y(0) = 2 \Rightarrow$$

$$2 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{\left(0+\frac{1}{2}+Ce^{2\cdot 0}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+C\right)}} \Leftrightarrow$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

Märk att $y(0) = 2 \Rightarrow y^2 = 4$ så vi kan glömma negativa roten. och sökta lösningen blir alltså:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}+\frac{e^{2x}}{4}\right)}}$$

6. I en cylinder finns 1 kg salt upplöst i 100 liter vatten. In i cylindern börjar man pumpa en vätska, som innehåller 5 gr salt per liter, med hastigheten 10 liter/min. Från cylindern avrinner fullt utblandad vätska med samma hastighet. Hur mycket salt finns det i cylindern efter 20 minuter? [Tips: Låt $Q(t)$ vara saltmängden i cylindern vid tidpunkten $t \geq 0$. Då är $Q'(t) =$ saltets ankomsthastighet - saltets avrinningshastighet $= 50 - \frac{Q(t)}{100} \cdot 10$ (som gr/min).]

Lösning: denna uppgift ger egentligen den ekvation som vi borde lösa med det samma. Men eftersom enligt mig är det svåraste i sådana här uppgifter att forma ekvationen kommer jag även nämna några ord om hur man härleder det.

Hur man härleder ekvationen. Vi söker alltså en funktion $Q(t)$ som skulle ange mängden salt (i kg) i cylinder vid tidpunkten t (minuter). Vi vet inte direkt så mycket om ekvationen, men vi vet en del om hur mängden ändras vid varje tidpunkt, dvs $Q'(t)t \geq 0$. Som tipset specifierar så är ändringen i i saltmängden $Q'(t) =$ (Hur mycket salt det kommer ini den tidpunkten) - (hur mycket salt det rinner ut). Om vi först ser på hur mycket salt det kommer in så är det relativt simpelt. Uppgiften berättar att in i cylindern pumpas vätska med farten $10\frac{l}{min}$ och denna vätska innehållder 5gr salt per liter. Totalt så kommer det alltså hela tiden ($\forall t \geq 0$) in $10 * 5 = 50\frac{gr}{min}$

Sen hur mycket det far ut. Enligt texten så rinner det ut vätska med farten $10\frac{l}{min}$. Dessutom så specifierar uppgiften att vätskan som rinner ut är fullt blandad, dvs. varje liter som rinner ut innehåller lika mycket salt. Så totala mängden salt som rinner ut vid tidpunkten t är [10$\cdot$ mängden salt per i en liter = 10$\cdot$ totala mängden salt i cylindern vid tidpunkten t dividerat med totala mängden vatten i cylindern vid tidpunkten t]. Nu när vi ännu märker att enligt vår definition ges totala mängden salt vid tidpunkt t av $Q(t)$ och att eftersom det rinner ut ock kommer in lika mycket vätska hela itden kommer totala mängden vätska hållas konstant på 100 l så blir alltså mängden salt som rinner ut vid t = [$10 \cdot \frac{Q(t)}{100}$ och den sökta ekvationen blir, som tipset redan bekrev $Q'(t) = 50 - \frac{Q(t)}{100} \cdot 10$.

Lösandet av ekvationen: Vi skriver först om ekvationen:

$$Q'(t) = 50 - \frac{Q(t)}{100} \cdot 10 \Leftrightarrow Q'(t) + \frac{Q(t)}{10} = 50$$

Den är alltså linjär och lösandet går igen på kända sätten. Vi löser denna igen via homogena/varierande av konstant

$$\begin{aligned} Q'(t) + \frac{Q(t)}{10} = 0 \Leftrightarrow Q'(t) = -\frac{Q(t)}{10} &\Rightarrow \\ \int^{Q} \frac{1}{s}\, ds = \int^{t} -\frac{1}{10}\, du &\Rightarrow \\ \ln|Q| = -\frac{t}{10} + C_1 &\Rightarrow \\ Q = \frac{C}{e^{\frac{t}{10}}} & \end{aligned}$$

Här antar vi även att mängden salt aldrig blir negativt ($Q(t) \geq 0 \forall t$) Nu byter vi åter ut C mot en funktion $C(t)$ och undersöker för hurudana $t, Q(t) = \frac{C(t)}{e^{\frac{t}{10}}}$ uppfyller vår ekvation.

$$\begin{cases} Q(t) = \frac{C(t)}{e^{\frac{t}{10}}} \\ Q'(t) = \frac{C'(t)}{e^{\frac{t}{10}}} - \frac{C(t)}{10e^{\frac{t}{10}}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{C'(t)}{e^{\frac{t}{10}}} - \frac{C(t)}{10e^{\frac{t}{10}}} + \frac{1}{10}\frac{C(t)}{e^{\frac{t}{10}}} = 50 \Rightarrow$$

$$\frac{C'(t)}{e^{\frac{t}{10}}} = 50 \Rightarrow C'(t) = 50e^{\frac{t}{10}} \Rightarrow$$

$$C(t) = \int^{t} 50e^{\frac{s}{10}}\,ds = 500e^{\frac{t}{10}} + C$$

$$\Longrightarrow Q(t) = \frac{500e^{\frac{t}{10}} + C}{e^{\frac{t}{10}}} = \frac{C}{e^{\frac{t}{10}}} + 500$$

Nu när vi ännu minns att uppgiften specifiera att i början ($t = 0$) fanns det 1000g salt i cylindern får vi alltså kravet $Q(0) = 1000$ från vilket vi kan lösa en specifik lösning:

$$Q(0) = 1000 \Rightarrow 1000 = \frac{C}{e^{\frac{0}{10}}} + 500 = C + 500 \Rightarrow C = 500$$

$$Q(t) = \frac{500}{e^{\frac{t}{10}}} + 500$$

Nu har vi alltså härlett en ekvation som ger mängden salt i cylindern vid varje tidpunkt (min). Upgiften frågade om saltmängden efter 20 min. Detta betyder vi skall räkna $Q(20)$:

$$Q(20) = \frac{500}{e^{\frac{20}{10}}} + 500 = \frac{500}{e^{2}} + 500$$