INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer I
Övning 2, Svarsförslag
2.2.2011
Jeremias Berg

1. Bestäm de partiella derivatorna $D_1 f$ och $D_2 f$ då

$$(i)\ f(x,y) = e^{\sin(xy)}, \quad (ii)\ f(x,y) = xy + \ln(1 + x^2y^2).$$

Lösning: Vi deriverar båda utrycken två gånger, både med avseende på x och y. För första funktionen gäller:

$$\begin{aligned} i) f(x,y) &= e^{\sin(xy)} \\ D_1 f &= \frac{\partial}{\partial x} e^{\sin(xy)} = e^{\sin(xy)} \cos(xy) y \\ D_2 f &= \frac{\partial}{\partial y} e^{\sin(xy)} = e^{\sin(xy)} \cos(xy) x \end{aligned}$$

Och för andra:

$$\begin{aligned} ii) f(x,y) &= xy + \ln(1 + x^2y^2) \\ D_1 f &= \frac{\partial}{\partial x}(xy + \ln(1 + x^2y^2)) = y + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} \\ D_2 f &= \frac{\partial}{\partial y}(xy + \ln(1 + x^2y^2)) = x + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} \end{aligned}$$

2. Bestäm de implicita lösningarna $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$x^2 - y + (y^2 - x)y' = 0.$$

Lösning: Låt $M(x,y) = x^2 - y$ och $N(x,y) = y^2 - x$. Då är både M och N deriverbara i hela $\mathbb{R}$ och vi kan skriva den givna ekvationen som $x^2 - y + (y^2 - x)y' = M(x,y) + N(x,y)$ Då vi ännu märker att:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)$$

Så kan vi alltså konstatera att den givna ekvationen är exakt. Och vi kan följa exemplet på sidan 11 för att hitta de implicita lösningarna $F(x,y)$ Låt $x_0 = 0$:

$$g(y) = \int^y N(x_0, s) ds = \int^y s^2 ds = \frac{y^3}{3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$F(x,y) = \int_0^x M(u,y) du + g(y) = \int_0^x u^2 - y du + \frac{y^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3} + C$$

3. Sök en integrerande faktor till differentialekvationen

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0,$$

samt lös den resulterande exakta ekvationen.

Lösning: Låt $M(x, y) = 3xy + y^2$ och $N(x, y) = x^2 + xy$ Vi märker först att:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

Så den givna ekvationen är inte exakt. Nu skulle vi kunna använda sats 1.17 för att hitta integrerande faktorn, men i detta relativt simpla fall är det lättare att helt enkelt pröva sig fram. Vi provar alltså mutliplicera den givna ekvationen med x.

$$\begin{aligned}
&x(3xy + y^2 + (x^2 + xy)y') = x0 \Rightarrow 3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0 \\
&M(x, y) = 3x^2y + xy^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = 3x^2 + 2xy \\
&N(x, y) = x^3 + x^2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = 3x^2 + 2xy
\end{aligned}$$

Alltså $\mu(x) = x$ fungerar som en integrerande faktor. Ifall vi skulle ha använt sats 1.17 skulle vi ha fått:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \right) = \frac{1}{x^2 + xy} (3x + 2y - 2x - y) \\
f(x) &= \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{1}{x} \quad \text{(Obs! endast en funktion av } x\text{)} \\
\mu(x) &= e^{\int_{x_0}^{x} f(s) ds} = e^{ln|x|} = |x|
\end{aligned}$$

Vilket också skulle ha fungerat. Nu för att lösa den nya diffekvationen följer vi igen tekniken på sidan 11. Låt $y_0 = 0$

$$\begin{aligned}
h(x) = \int^{x} M(u, y_0) du = \int^{x} 0 du = C \\
F(x, y) = h(x) + \int_{y_0}^{y} N(x, s) ds = C + x^3y + \frac{x^2y^2}{2}
\end{aligned}$$

Vilket alltså är de sökta implicita lösningarna.

4. Lös initialvärdesproblemet

$$y' = -\frac{y}{x - 3}, \quad y(-1) = 1,$$

som (i) en lineär differentialekvation, (ii) en separerbar differentialekvation.

Lösning: i) Vi löser ekvationen först som en lineär ekvation. Observera först att:

$$y' = -\frac{y}{x-3} \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x-3} = 0$$

Alltså är den givna ekvationen redan homogen. Så ifall vi skulle använda tekniken som presenteras i exempel 1.22 med först lösande av homogena formen och sedan varierande av konstanten skulle vi i detta fall endast behöva lösa homogena ekvationen. Detta är inte direkt fel, men eftersom det motsvaras av att lösa ekvationen som en separerbar, vilket kommer att presenteras i *ii*) så kommer vi för övningens skull istället här att lösa ekvationen med hjälp av en integrerande faktor.

Låt $M(x,y) = \frac{y}{x-3}$ och $N(x,y) = 1$ Nu skulle satserna 1.17 och 1.18 ge den integrerande faktorn $\mu(x)$ genast. Näst kommer jag dock att presentera ett alternativt sätt att härleda faktorn. Märk först att:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{1}{x-3}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = 0$$

Så ekvationen är inte exakt. Vi söker nu alltså en funktion på x nämligen $\mu(x)$ vilken skulle göra ekvationen exakt. Vi kan hitta denna genom följande observationer:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)N(x,y) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)N(x,y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\frac{\partial}{\partial y}\mu(x))M(x,y) + (\frac{\partial}{\partial y}M(x,y))\mu(x) - \left((\frac{\partial}{\partial x}\mu(x))N(x,y) + (\frac{\partial}{\partial x}N(x,y))\mu(x)\right) = 0$$
$$0 + \frac{\mu(x)}{x-3} - \mu'(x)\cdot 1 - 0 = 0 \quad (\text{Obs } \tfrac{\partial}{\partial y}\mu(x) = 0 \text{ eftersom } \mu(x) \text{ är en funktion av } x)$$
$$\frac{\mu(x)}{x-3} = \mu'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \Rightarrow$$
$$\ln|\mu(x)| = \ln|x-3| + C_1 \Leftrightarrow \mu(x) = C_2|x-3| \quad \mu(x) \neq 0 \quad x \neq 3$$

Nu baserat på detta kan vi dessutom konstatera att detta $\mu(x)$ fungerar för alla konstanter $C_2 \neq 0$ För simpelhetens skull kan vi alltså välja $C_2 = 1$ och få $\mu(x) = |x-3|$

Nu kan vi alltså lösa givna ekvationen med hjälp av $\mu(x)$

$$
\begin{aligned}
&\mu(x)y' + \mu(x)\frac{y}{x-3} = \mu(x)\cdot 0 \Rightarrow |x-3|y' + \frac{|x-3|}{x-3}y = 0 \Rightarrow \\
&e^{\ln|x-3|} + \frac{e^{\ln|x-3|}}{x-3}y = 0 \Rightarrow e^{\ln|x-3|}y' + \frac{d}{dx}\left(e^{\ln|x-3|}\right)y = 0 \Rightarrow \\
&\frac{d}{dx}\left(e^{\ln|x-3|}\cdot y\right) = 0 \Rightarrow e^{\ln|x-3|}\cdot y = \int^x 0 \ ds = C \Rightarrow \\
&y = \frac{C}{|x-3|} \quad (x \neq 3)
\end{aligned}
$$

Märk även att med denna teknik behöver vi inte under lösnings processen förbjuda $y(x) = 0 \Rightarrow C = 0$. Detta är rätt eftersom $y = 0$ är en av ekvationens triviala lösningar vilket lösningsmetoden med hjälp av separerbarheten visar bättre. Lösningen för givna initialvärdesproblemet ges som känt av:

$$y(-1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{C}{|-1-3|} = \frac{C}{|-4|} = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4$$

Som en slutkommentar ännu gällande detta. Fast processen i att själv härleda $\mu(x)$ kan verka komplicerad kan det ifall man förstår grundidén i meningen med en integrerande faktor (att "göra"den givna ekvationen exakt och sedan använda kedjeregeln) ändå vara lättare jämfört med att memorera satser så som 1.17 och 1.18 utantill.

Lösning med hjälp av separerbarheten: Låt $p(x) = \frac{1}{x-3}$ och $q(y) = -y$ Nu kan vi skriva

$$y' = -\frac{y}{x-3} = p(x)q(y) \quad x \neq 3$$

Så ekvationen är separerbar och har dessutom triviallösningen $q(y) = 0 \Rightarrow y(x) = 0$. Resten av lösningarna fås genom separering av variabler:

$$
\begin{aligned}
&-\int^y \frac{1}{u}du = \int^x \frac{1}{x-3} \Rightarrow \\
&-\ln|y| = \ln|x-3| + C_1 \Rightarrow \\
&\ln|y| = \ln\frac{C_2}{|x-3|} \quad C_2 = e^{-C_1} \Rightarrow \\
&|y| = \frac{C_2}{|x-3|}
\end{aligned}
$$

Märk att här borde vi ha förbjudit $y = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$ eftersom på näst sista raden har vi $\ln|y|$. Men vi vet att $y(x) = 0$ är en av ekvationens triviallösningar och behöver därför inte förbjuda det (se även kommentarerna i slutet på del i))

I.V.P:n löses på bekant sätt:

$$y(-1) = 1 \Rightarrow |1| = 1 = \frac{C}{|-1-3|} = \frac{C}{|-4|} = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4$$

5. Lös initialvärdesproblemet

$$y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}, \quad y(\pi) = \pi.$$

Lösning: Vi märker att ekvationen är linjär. Dvs. vi har att välja mellan att lösa den genom en integrerande faktor eller "varierande av konstanten". Eftersom vi hittills har gjort de flesta uppgifter via en integrerande faktor löser vi denna genom variering av konstanten.

Steg 1. Lösning för motsvarande homogena ekvationen Vi försöker först lösa den motsvarande homogena ekvationen $y' + (\cos x)y = 0 \Leftrightarrow y' = -(\cos x)y$ Låt $p(x) = \cos x$ och $q(y) = y$ Nu är förra ekvationen separerbar och har en triviallösning $y(x) = 0$ separering av variablerna ger resten av lösningarna:

$$\int^y \frac{1}{u} du = -\int^x \cos s \, ds \Rightarrow$$
$$\ln|y| = -\sin(x) + C \Rightarrow$$
$$y = C_2 e^{-\sin(x)}$$

Dessa är alltså lösningarna för homogena ekvationen.

Steg 2. Varierande av konstanten För att lösa uppgiftens ekvationen följer vi teknikerna som bevisas i sats 1.21 och ges exempel på i till exempel i exempel 1.23 Vi söker alltså en specifik lösning till $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$ genom att substituera in $y(x) = C(x)e^{-\sin(x)}$ i den:

$$\begin{aligned}
y(x) = C(x)e^{-\sin(x)} \Rightarrow y'(x) = C'(x)e^{-\sin(x)} - \cos(x)e^{-\sin(x)}C(x) \\
\Longrightarrow C'(x)e^{-\sin(x)} - \cos(x)e^{-\sin(x)}C(x) + \cos(x)C(x)e^{-\sin(x)} = e^{-\sin x} \\
C'(x)e^{-\sin(x)} = e^{-\sin x} \\
C'(x) = 1 \\
C(x) = x + C
\end{aligned}$$

Den fullständiga lösningen blir alltså:

$$y(x) = (x + C)e^{-\sin(x)}$$

Sökta lösningen för I.V.P:n är alltså

$$\begin{aligned}
y(\pi) = \pi \Rightarrow \pi = (\pi + C)e^{-\sin(\pi)} \Rightarrow \\
\pi = \pi + C \Rightarrow C = 0 \\
y(x) = xe^{-\sin(x)}
\end{aligned}$$

6. Clairauts differentialekvation har formen

$$y = xy' + f(y'),$$

där $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är en given funktion. Verifiera att $y(x) = cx + f(c)$ är en lösning för varje konstant $c \in \mathbf{R}$. Tillämpa detta på differentialekvationen

$$xy' - e^{y'} - y = 0.$$

Lösning: Vi måste endast verifiera att den givna ekvationen är en lösning. Detta går simplast genom att helt enkelt derivera och substituera in i ekvationen. Vi slår alltså fast ett godyckligt $C_0 \in \mathbb{R}$ märk att nu är $f(C_0) \in \mathbb{R}$ endast en konstant. Vi får alltså:

$$\begin{aligned}
&y(x) = C_0 x + f(C_0) \Rightarrow \\
&y'(x) = C_0 \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y = C_0 x + f(C_0) \\ xy' + f(y') = xC_0 + C_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vilket visar att ekvationen $y = xy' + f(y')$ håller.

Nu tillämpar vi detta på $xy' - e^{y'} - y = 0$ om $f(x) = e^x$ så är denna ekvation av formen $xy' - e^{y'} - y = 0 \Leftrightarrow xy' - e^{y'} = y$ och med ovan är (en del av) lösningarna av formen:

$$y(x) = Cx + e^c \quad (C \in \mathbb{R})$$

Märk att ekvationen kan ha andra lösningar också. Men för denna uppgift räcker dessa.