INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differentialekvationer I
Övning 5, Svarsförslag
24.2.2011
Jeremias Berg

1. Sök ett fundamentalsystem av lösningar till differentialekvationerna
$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad \text{och} \quad y'' - 2y' + y = 0.$$
Lösning: För att dessa ekvationer har konstanta faktorer kan vi ganska långt använda den karakteristiska funktionen för D.E:na som presenteras i stycke 3.3. och resultaten som följer av satserna 3.11 3.13, 3.15 och 3.17. Vi löser den karakteristiska funktionen för första D.E:n
$$y'' + 5y' + 6y = 0$$
$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow (r+3)(r+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = -2 \end{cases}$$
Så med stöd av sats 3.13 är fundamentalsystemet för ekvationen $\{e^{-3x}, e^{-2x}\}$
För andra ekvationen:
$$y'' - 2y' + y = 0$$
$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$$
Med stöd av sats 3.15 är fundamentalsystemet för ekvationen $\{e^x, xe^x\}$

2. Lös randvärdesproblemet
$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi/4) = -1.$$
Lösning: Vi börjar med att söka fundamentalsystemet för ekvationen. Eftersom koefficienterna igen är konstanta fås fundamentalsystemet genom karakteristiska polynomet.
$$y'' + 4y = o$$
$$r^2 + 4r = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 \Leftrightarrow r = 0 \pm 2i$$
Så med hjälp av sats 3.17 utgörs fundamentalsystemet av $e^{0x}\cos 2x = \{\cos 2x, \sin 2x\} = e^{0x}\sin 2x$ och därmed är alla lösningar till ekvationen av formen:
$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Nu för att lösa uppgiftens problem substituerar vi in givna värdena i allmänna lösningen och löser ekvationssystemet för C_1 och C_2

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 \\ y(\pi/4) = -1 &\Rightarrow -1 = C_1 \cos \pi/2 + C_2 \sin \pi/2 = C_2 \end{aligned}$$

Så den sökta ekvationen blir:

$$y(x) = \cos 2x - \sin 2x$$

3. Lös den nonhomogena differentialekvationen

$$y'' + 2y' + y = x$$

genom (i) att variera konstanterna, (ii) metoden med obestämda koefficienter (dvs. gissning).

Lösning: Vi löser först ekvationen genom att variera konstanterna. Vi följer tekniken som presenteras i stycke 3.4 och löser först den motsvarande homogena D.E:n genom dens karakteristiska polynom.

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y = 0 \\ r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \end{aligned}$$

Så som tidigare utgörs den homogena ekvationens fundamentalsystem av $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ Vi söker nu en specifik lösning till den nonhomogena ekvationen. Låt
$v(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$ Vi undersöker nu för hurudana $C_1(x)$ och $C_2(x)$ $v(x)$ uppfyller uppgiftens ekvation. Vi deriverar först.

$$\begin{aligned} v(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x} \\ v'(x) = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} + C_2(x)(1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

Lika som i kompendiet antar vi nu att $C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0$ Detta gör vi för att slippa en andra ordningens D.E för okända funktioner $C_1(x)$ och $C_2(x)$. Detta får vi göra eftersom vi bara är intresserade av att hitta en enda lösning på uppgiftens D.E. Med detta antagande kommer vi att tappa bort en del av möjligheterna för $C_1(x)$ och $C_2(x)$. Men istället kommer vi faktiskt göra det möjligt att hitta någon lösning, vilket räcker för att lösa uppgiftens D.E då vi känner till fundamentalsystemet.

Vi skriver nu om första derivatan på $v(x)$ med stöd av antagandet och deriverar igen:

$$\begin{aligned} &v'(x) = C_2(x)(1-x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} = e^{-x}(C_2(x)(1-x) - C_1(x)) \\ &v''(x) = -e^{-x}\left(C_2(x)(1-x) - C_1(x)\right) + e^{-x}\left(C_2'(x)(1-x) - C_2(x) - C_1'(x)\right) = \\ &v''(x) = e^{-x}\left(C_2'(x)(1-x) - C_2(x) - C_1'(x) - (C_2(x)(1-x) - C_1(x))\right) = \\ &e^{-x}\left(C_2'(x)(1-x) - C_2(x) - C_1'(x) - C_2(x)(1-x) + C_1(x)\right) \\ &v''(x) = e^{-x}\left(C_2'(x)(1-x) - C_1'(x) + C_2(x)(x-2) + C_1(x)\right) \end{aligned}$$

Nu är det dags att substituera in $v(x)$ i uppgiftens ekvation:

$$\begin{aligned}
&e^{-x}\left(C_2'(x)(1-x) - C_1'(x) + C_2(x)(x-2) + C_1(x)\right) + 2e^{-x}(C_2(x)(1-x) - C_1(x)) \\
&\quad + C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x} = x \\
\Longrightarrow &e^{-x}(1-x)C_2'(x) - e^{-x}C_1'(x) = x
\end{aligned}$$

Det sista handlar helt enkelt om mekanisk manipulation av ekvationen. En hel del av termerna kommer att ta ut varann. När vi kommit såhär långt så har vi alltså härlett 2 ekvationer för $C_1(x)$ och $C_2(x)$. Vi löser till näst dessa system. (Obs! systemet är samma som 3.15 i kap 3.4. Men åter igen är det bra att kunna härleda det själv)

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0 \\ e^{-x}(1-x)C_2'(x) - e^{-x}C_1'(x) = x \end{cases} \\
&C_1'(x) = -C_2'(x)x \\
&e^{-x}(1-x)C_2'(x) + e^{-x}C_2'(x)x = x \Leftrightarrow C_2'(x) = xe^{x} \\
\Longrightarrow &\text{Partiell integrering } C_2(x) = e^{x}(x-1) \\
\Longrightarrow &C_1'(x) = -xe^{x}x = -x^2e^{x} \\
\Longrightarrow &\text{Partiell integrering } C_1(x) = -e^{x}(x^2-2x+2) \\
\Longrightarrow &v(x) = (-e^{x}(x^2-2x+2))e^{-x} + (e^{x}(x-1))xe^{-x} = \\
&(-x^2+2x-2) + (x^2-x) = x-2
\end{aligned}$$

Mycket mekaniskt räknande, men till slut så har vi alltså hittat en specifik lösning på den givna ekvationen. Denna metod involverar en hel del räknande där möjligheten för att göra fel är stor. Men som tur är går resultatet ganska lätt all kolla:

$$\begin{aligned}
v(x) &= x-2 \\
v'(x) &= 1 \\
v''(x) &= 0 \\
v''(x) + 2v'(x) + v(x) &= 0 + 2 + x - 2 = x
\end{aligned}$$

Så $v(x)$ uppfyller faktiskt den D.E:n vi försöker lösa. Nu fås resten av lösningarna enligt sidan 54 av kompendiet som lösningarna på motsvarande homogena ekvation plus denna specifika lösning. Dvs. Uppgiftens lösningar är:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x - 2$$

Märk att med denna uppgift så skulle det ha varit mycket simplare att använda metoden med obestämda koeficienter, vilket vi snart ser. Fördelen med att variera konstanterna är att det fungerar garanterat varje gång. Nackdelarna är att det involverar mycket räknande och det är lätt att göra slarvfel.

Lösning genom att gissa: Vi löser näst samma ekvation $y'' + 2y' + y = x$ genom obestämda koeficienter. För denna metod krävs också fundamentalsystemet för motsvarande homogena. Som räknat i första delen utgörs den av $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$.

Nu dock så ändrar vi på hur vi närmar oss problemet. Denna metod går ut på att studera "det som skiljer"nonhomogena från motsvarande homogena. Dvs. i detta fall x Vi försöker hitta en specifik lösning, denna gång genom att gissa. Eftersom x är ett första gradens polynom gissar vi på lösningen $y(x) = Ax + B$ och undersöker tillnäst för hurudana A och B $y(x)$ uppfyller den givna ekvationen genom att derivera och substituera.

$$\begin{aligned}
&y(x) = Ax + B \\
&y'(x) = A \\
&y''(x) = 0 \\
\Longrightarrow &0 + 2A + Ax + B = x \Leftrightarrow \\
&Ax + (2A + B) = x \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 2 \cdot 1 + B = 0 \Leftrightarrow B = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dvs. om $y(x) = x - 2$ så är y en lösning på givna ekvationen. Eftersom detta är samma resultat som genom att variera konstanter så kan vi vara ganska säkra på att detta är rätt, ekvationens alla lösningar blir åter igen:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x - 2$$

Som märks var detta ett mycke enklare lösningssätt för denna ekvation.

4. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' + 4y' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Tips: gör försöket $y(x) = A\sin x + B\cos x$ för en lösning till den nonhomogena ekvationen.

Lösning: En andra ordningens D.E. Vi börjar med att lösa motsvarande homogena ekvation $y''+4y'+4y = 0$ denna har konstanta koeficienter så som vanligt fås lösningen med hjälp av karakteristiska polynomet.

$$\begin{aligned}
y'' + 4y' + 4y = 0 \\
r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -2
\end{aligned}$$

Så fundamentalsystemet för homogena ekvationen är $\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$

Nu för att lösa den nonhomogena kunde vi igen variera konstanterna, men eftersom vi redan fick ett tips på en bra gissning för en specifik lösning följer vi hellre metoden för konstanta koeficienter. Dvs vi låter $y(x) = A\sin x + B\cos x$ och undersöker för hurudana A och B y uppfyller den ekvation vi håller på att lösa.

$$\begin{aligned}
&y(x) = A\sin x + B\cos x \\
&y'(x) = A\cos x - B\sin x \\
&y''(x) = -A\sin x - B\cos x \\
\Longrightarrow &-A\sin x - B\cos x + 4\left(A\cos x - B\sin x\right) + 4\left(A\sin x + B\cos x\right) = \sin x \\
\Rightarrow &\sin x(-A - 4B + 4A - 1) + \cos x(-B + 4A + 4B) = 0 \Rightarrow \\
&\begin{cases} 3A - 4B = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{25} \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}
\end{aligned}$$

Så en specifik lösning till ekvationen utgörs alltså av $v(x) = \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x$ Och därmed är alla lösningar till ekvationen av formen $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x$

För att lösa I.V.P:n deriverar vi detta först och formar sedan ett ekvationssystem för att lösa C_1 och C_2

$$\begin{aligned}
y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{3\sin x - 4\cos x}{25} \\
y'(x) = -2C_1e^{-2x} + C_2(e^{-2x}(1-2x)) + \frac{3\cos x + 4\sin x}{25} \\
y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + \frac{-4}{25} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{25} \\
y'(0) = 1 \Rightarrow -2C_1 + C_2 + \frac{3}{25} = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Så den sökta lösningen blir

$$y(x) = \frac{4}{25}e^{-2x} + \frac{6x}{5}e^{-2x} + \frac{3\sin x - 4\cos x}{25}$$

5. Lös differentialekvationen

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 2x - 1, \quad x > 0.$$

Kom ihåg: motsvarande homogena differentialekvation löstes i övning 4:6.

Lösning: Från förra veckans upgifter får vi genast att fundamental systemet för motsvarande homogena ekvation utgörs av $\{x, \frac{1}{x^2}\}$. Det som blir kvar är alltså att söka en specifik lösning till ekvationen. Om vi betraktar ekvationen i normalform.

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Så märker vi att ekvationen på andra sidan: $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ så verkar den inte direkt av en typ som man skulle kunna gissa en lösning till. Så vi väljer istället att variera konstanterna. Låt alltså $v(x) = C_1(x)x + C_2(x)\frac{1}{x^2}$. Vi undersöker för hurudana $C_1(x)$ och $C_2(x)$ $v(x)$ löser uppgiftens ekvation. Detta görs åter igen genom att derivera och substituera in i ekvationen.

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1(x)x + \frac{C_2(x)}{x^2} \\ v'(x) &= C_1'(x)x + C_1(x) + \frac{C_2'(x)}{x^2} - \frac{2C_2(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Som tidigare antar vi igen att $C_1'(x)x + \frac{C_2'(x)}{x^2} = 0$ och fortsätter sedan

$$\begin{aligned} \Rightarrow v'(x) &= C_1(x) - \frac{2C_2(x)}{x^3} \\ v''(x) &= C_1'(x) - 2\left(\frac{C_2'(x)}{x^3} - \frac{3C_2(x)}{x^4}\right) \\ v''(x) &= C_1'(x) - \frac{2C_2'(x)}{x^3} + \frac{6C_2(x)}{x^4} \\ \Longrightarrow \text{Substituerar in } & x^2(C_1'(x) - \frac{2C_2'(x)}{x^3} + \frac{6C_2(x)}{x^4}) + \\ & 2x\left(C_1(x) - \frac{2C_2(x)}{x^3}\right) - 2\left(C_1(x)x + \frac{C_2(x)}{x^2}\right) = 2x - 1 \\ & x^2 C_1'(x) - \frac{2C_2(x)}{x} = 2x - 1 \Leftrightarrow C_1(x) - \frac{2C_2(x)}{x^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Så nu har vi igen härlett 2 ekvationer som skall lösas.

$$\begin{cases} C_1'(x)x + \frac{C_2'(x)}{x^2} = 0 \\ C_1(x) - \frac{2C_2(x)}{x^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Observera också att om vi skulle ha använt kompendiets formel för ekvationssystemet så, borde vi vara mycket noggranna med att först skriva om givna ekvationen i normalform. Dvs. dividera bort x^2 från alla termer. I ett allmännare fall, utan restriktionen x^2 skulle detta leda till ytterligare svårigheter. Åter igen är det bättre att förstå härledningarna och metoderna än att lära sig formler utantill.

Vi löser tillnäst ekvationssystemet för $C_1(x)$ och $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + \frac{C_2'(x)}{x^2} = 0 \\ C_1(x) - \frac{2C_2(x)}{x^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = -\frac{C_2'(x)}{x^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{C_2'(x)}{x^3} - \frac{2C_2(x)}{x^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{3C_2'(x)}{x^3} = \frac{2x-1}{x^2}$$

$$C_2'(x) = \frac{x-2x^2}{3} \Rightarrow$$

$$C_2(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right)$$

$$C_1'(x) = -\frac{C_2'(x)}{x^3} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2} \Rightarrow$$

$$C_1(x) = \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3x}$$

$$v(x) = C_1(x)x + C_2(x)\frac{1}{x^2} = \frac{2x}{3}\ln|x| + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{2x}{9}$$

$$v(x) = \frac{2x}{3}\ln|x| + \frac{1}{2} - \frac{2x}{9}$$

Detta är alltså den sökta specifika lösningen på ekvationen. Resten av lösningarna har formen

$$y(x) = C_1x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{2x}{3}\ln|x| + \frac{1}{2} - \frac{2x}{9} = C_3x + \frac{C_2}{x} + \frac{2x}{3}\ln|x| + \frac{1}{2}$$

6. Låt $I = (a, b)$ och anta att funktionerna $y_1, y_2 \in C^2(I)$ får ett lokalt extremvärde i en gemensam punkt $x_0 \in I$. Visa att $\{y_1, y_2\}$ inte bildar ett fundamentalsystem av lösningar till någon differentialekvation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Tips: betrakta Wronskis determinant $W(y_1, y_2)(x_0)$.

   Lösning: Fastän uppgiften kan verka komplicerad från början så skall man inte "bli rädd". Vi gör som tipset säger och undersöker Wronskis determinant vid x_0.

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0) \cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0) \cdot y_1'(x_0)$$

   Nu eftersom x_0 var ett lokalt extremvärde för både y_1 och y_2 så får vi från Analys 1 att $y_1(x_0) = 0$ och $y_2(x_0) = 0$ Så vi får alltså att

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0) \cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0) \cdot y_1'(x_0) = y_1(x_0) \cdot 0 - y_2(x_0) \cdot 0 = 0$$

   När vi ännu minns sats 3.6 på sidan 46 som säger att om $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ för något $x_0 \in I$ så är $W(y_1(x), y_2(x)) = 0 \forall x \in I$ Eftersom intervallet I var ett godtyckligt öppet intervall så kan vi dra ut gränserna för att täcka hela $\mathbb{R}$.