Differentialekvationer I
Räkneövning 4
17.2. 2011

1. Sök ekvationen för den kurva $y = y(x)$ som har följande egenskap: tangenten till kurvan i punkten (x_0, y_0) skär x-axeln i punkten $(x_0 + kx_0^2, 0)$, där $k > 0$ är en konstant, och kurvan löper genom punkten $(1, e)$.

2. Lös differentialekvationen

$$y'(y' - x) = y(y - x).$$

Tips: gruppera om termerna, samt använd att $(y')^2 - y^2 = (y' - y)(y' + y)$.

3. Sök en approximation med Eulers metod med steglängden $h = \frac{1}{4}$ till värdet $y(1)$ för lösningen $y = y(x)$ av initialvärdesproblemet

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2.$$

4. Lös differentialekvationen

$$(y')^2 + 2y'y'' = 0$$

genom att substituera $w(x) = y'(x)$.

5. Beräkna Wronskis determinant $W(y_1, y_2)$ för följande par $\{y_1, y_2\}$ av funktioner:

$$(i)\ (x, x^2), \qquad (ii)\ (e^{2x}, xe^{2x}).$$

Kan paret (x, x^2) bilda ett fundamentalsystem av lösningar till en lineär differentialekvation av 2. ordningen på hela $\mathbf{R}$?

6. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0$$

med reducering av ordningen, då $y(x) = x$ utgör en lösning.

Kursprovet ordnas måndag 28.2 kl 13-15 (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). Alternativt provtillfälle ordnas vid behov (tag kontakt).

Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 4
17.2. 2011

1. Etsi käyrä $y = y(x)$ jolla on seuraava ominaisuus: käyrän tangentti pisteessä (x_0, y_0) leikkaa x-akselin pisteessä $(x_0 + kx_0^2, 0)$, missä $k > 0$ on vakio, ja käyrä kulkee pisteen $(1, e)$ kautta.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(y' - x) = y(y - x).$$

Vihje: ryhmittele termit sopivasti ja käytä $(y')^2 - y^2 = (y' - y)(y' + y)$.

3. Etsi Eulerin menetelmän avulla askelpituudella $h = \frac{1}{4}$ approksimaatio arvolle $y(1)$ alkuarvo-ongelman

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2,$$

ratkaisulle $y = y(x)$.

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(y')^2 + 2y'y'' = 0$$

sijoittamalla $w(x) = y'(x)$.

5. Laske Wronskin determinantti $W(y_1, y_2)$ seuraaville funktiopareille $\{y_1, y_2\}$:

$$(i)\ (x, x^2), \qquad (ii)\ (e^{2x}, xe^{2x}).$$

Voiko pari (x, x^2) muodostaa ratkaisujen perusjärjestelmä jollekin 2. kertaluvun lineaariselle differentiaaliyhtälölle koko joukossa $\mathbf{R}$?

6. Etsi differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0$$

kaikki ratkaisut kertaluvun pudotuksen avulla, kun $y(x) = x$ on eräs ratkaisu.

Kurssikoe järjestetään maanantaina 28.2 klo 13-15 (samalla kurssin *Geometria* kurssikoe). Myös vaihtoehtoinen koetilaisuus tarvittaessa (ota yhteys luennoijaan).