INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer I
Övning 1, Svarsförslag
27.1.2011
Jeremias Berg

1. Sök den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''(x) - \cos x - 3 = 0$. Vilken lösning satisfierar initialvärdesproblemet $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$?

   Lösning: Vi skriver om den givna ekvationen som $y''(x) = \cos x + 3$ och märker att ekvationen är direkt lösbar genom integrering två gånger:

$$y''(x) = \cos x + 3 \Leftrightarrow y'(x) = \int^x (\cos u + 3)\ du = \sin x + 3x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$
$$y(x) = \int^x (\sin u + 3u + C_1)\ du = -\cos x + \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

   Detta är alltså den allmänna lösningen för ekvationen. För att hitta lösningen som satisfierar initialvärdesproblemet $y(0) = 1, y'(0) = 1$ substituerar vi de givna värden i respektiva utrycken

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = \sin 0 + 3 \cdot 0 + C_1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\cos 0 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 1 \cdot 0 + C_2 = -1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2$$

   Funktionen som satisfierar initialvärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -\cos x + \frac{3}{2}x^2 + x + 2$$

2. Förklara varför differentialekvationen

$$y' = 1 + x^2 y^2$$

   inte är separerbar. [Exempelvis: om $1+x^2y^2 = p(x)q(y)$, substituera $x = 0$ och $y = 0$].

   Lösning: Vi följer exemplet och gör en antites, antag att $1 + x^2y^2 = p(x)q(x)$ för några p och q. Nu är:

$$p(0)q(y) = 1 + 0^2y^2 = 1 \Rightarrow q(y) = \frac{1}{p(0)} \quad \text{(OBS! } p(0) \neq 0 \text{ eftersom då skulle } p(0)q(y) = 0)$$
$$\Rightarrow p(x)q(y) = \frac{p(x)}{p(0)} \not\Leftrightarrow$$

Sista raden är en motsägelse eftersom på vänster sida har vi en funktion av både x och y och på höger sida har vi en funktion endast av x. För att tydligare visa motsägelsen kan vi fortsätta:

$$p(x)q(0) = 1 + x^2 \cdot 0^2 = 1 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{q(0)}$$
$$\Longrightarrow p(x)q(y) = \frac{p(x)}{p(0)} = \frac{1}{p(0)q(0)} \not\Leftrightarrow$$

Vilket är en funktion eftersom vi på högra sidan har en konstant och på vänster sida en funktion.

3. Lös differentialekvationen
$$y' = y(y+1).$$

Lösning: Låt:

$$p(x) = 1, \quad q(y) = y(y+1) \, \forall y, x \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi skriva den givna ekvationen som: $y' = 1 \cdot y(y+1) = p(x)q(y)$ och därifrån märka att ekvationen är separerbar Ekvationen har två triviala lösningar, detta ser vi från att:
$$q(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$
De triviala lösningarna är alltså $y(x) = 0$ och $y(x) = -1$
Resten av lösningarna hittas genom separering av variablerna:

$$\int^y \frac{1}{u(u+1)} du = \int^x 1 dv \Leftrightarrow$$
$$\int^y \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \int^x 1 dv \Leftrightarrow$$
$$\ln|y| - \ln|y+1| = x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$
$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + C_1$$

För att integrera ekvationens vänstra led har vi använt partialbråkuppdelning:

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{\mathrm{A}}{y} + \frac{\mathrm{B}}{y+1} = \frac{\mathrm{A}(y+1) + \mathrm{B}y}{y(y+1)} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow 1 = \mathrm{A}(y+1) + \mathrm{B}y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Genom att sätta in olika värden på y kan vi lösa ut värden på A och B:

$$y = 1 \text{ och } y = 2 \Longrightarrow \begin{cases} 2\mathrm{A} + \mathrm{B} = 1 \\ 3\mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 1 \\ \mathrm{B} = -1 \end{cases}$$

Nu kan vi fortsätta med givna ekvationen:

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + C_1 \Leftrightarrow \left|\frac{y}{y+1}\right| = e^{(x+C_1)} = C_2e^x \quad C_2 = e^{C_1} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{y}{y+1} = Ce^x \quad C = \pm C_2 \neq 0$$

Detta ger den implicita lösningen för ekvationen. Märk även att vanligen skulle $y \neq -1$ och $y \neq 0$ i allmänna lösningarna. Eftersom dessa var ekvationens triviala lösningar behöver detta inte förbjudas och vi kan tillåta $C_2 = 0$

4. Lös differentialekvationen
$$y' = e^{x+y},$$
samt sök den lösning $y = y(x)$ som satisfierar $y(1) = 0$.

Lösning: Låt denna gång:

$$p(x) = e^x, \quad q(y) = e^y \quad \forall y, x \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi skriva den givna ekvationen som: $y' = e^x e^y = p(x)q(y)$ så ekvationen är separerbar. Eftersom $q(y) = e^y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. så har ekvationen inte heller några triviala lösningar. Vi söker lösningarna genom separering av variablerna.

$$\int^y \frac{1}{e^u}du = \int^x e^v dv \Leftrightarrow -\frac{1}{e^y} = e^x + C_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^y} = C_2 - e^x \Leftrightarrow -y = \ln\left(C_2 - e^x\right) \quad C_2 = -C_1$$
$$\Leftrightarrow y = \ln\frac{1}{C_2 - e^x} \quad \text{där } C_2 - e^x > 0 \Rightarrow C_2 > e^x$$

Detta ger allmänna lösningen. För att lösa initialvärdesproblemet substituerar vi:

$$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = y(1) = \ln\frac{1}{C_2 - e^1} \Rightarrow C_2 - e = 1 \Rightarrow C_2 = 1 + e$$
$$y(x) = \ln\frac{1}{1 + e - e^x} \quad \text{för } 1 + e - e^x > 0 \Rightarrow x < \ln\left(1 + e\right)$$

5. Lös initialvärdesproblemet

$$y' = y^2 + 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Lösning Låt än en gång;

$$p(x) = 1, \quad q(y) = y^2 + 1 \quad \forall y, x \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi skriva den givna ekvationen som: $y' = 1 \cdot y^2 + 1 = p(x)q(y)$ så ekvationen är separerbar. Eftersom $q(y) = y^2 + 1 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. så har ekvationen inte några triviala lösningar. Separering av variablerna ger:

$$\begin{aligned} \int^y \frac{1}{u^2+1} du = \int^x 1 dv \Leftrightarrow \\ \arctan y = x + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\ y = \tan(x + C) \quad \left(x + C \neq \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Detta ger allmänna lösningen. För att lösa initialvärdesproblemet substituerar vi:

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow 1 = \tan(\frac{\pi}{2} + C) \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{4} \\ y(x) = \tan x - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

6. Undersök om följande differentialekvationer är exakta, och i så fall i vilka områden. Sök den implicita lösningen $y = y(x)$ i de exakta fallen.

$$(i) \quad 2x + 3 + (2y - 2)y' = 0, \quad (ii) \quad e^x \sin(y) + 3y - (3x - e^x \sin(y))y' = 0.$$

Lösning Vi undersöker exakthet med hjälp av sats 1.11 i kompendiet.

i) Låt $M(x, y) = 2x + 3$ och $N(x, y) = 2y - 2$ Nu är $M(x, y) + N(x, y)y' = 2x + 3 + (2y - 2)y'$ och då vi konstaterar att både $M(x, y)$ och $N(x, y)$ är deriverbara i hela $\mathbb{R}^2$ så kan vi visa att den givna ekvationen är exakt genom:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(2y - 2) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Vi söker tillnäst de implicita lösningarna till denna ekvation.Vi gör detta genom att försöka hitta $F(x)$ så att $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ Tekniken följer beviset på sats 1.11 samt exempel 1.12. Låt $x_0 = 0$ Vidare låt:

$$g(y) = \int^y N(0, u) du = \int^y 2u - 2du = y^2 - 2y + C$$

Nu är den sökta funktionen F:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(v,y)dv + g(y) = \int_{0}^{x} (2v+3)dv + y^2 - 2y + C = x^2 + 3x - (0^2 + 3\cdot 0)$$
$$+ y^2 - 2y + C$$
$$F(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y + C$$

Vilka alltså är de implicita lösningarna på funktionerna.

ii) Låt nu $M(x,y) = e^x \sin y + 3y$ och $N(x,y) = 3x - e^x \sin y$ Nu är $M(x,y) + N(x,y)y' = e^x \sin y + 3y + (3x - e^x \sin y)$ och:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^x \sin y + 3y = e^x \cos y + 3 \neq 3 - e^x \sin y = \frac{\partial}{\partial x} 3x - e^x \sin y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dvs denna ekvation är inte exakt.