INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 8
För veckan som börjar 28. 3. 2011.

1. Vi betraktar funktionerna $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, som definieras med villkoren

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Konvergerar följden $(f_n)$ punktvis? Konvergerar den likformigt?

2. Vi betraktar funktionerna $f_n\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, som definieras med villkoren

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Konvergerar följden $(f_n)$ punktvis? Konvergerar den likformigt?

3. Vi betraktar funktionerna $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, som definieras med villkoren

$$f_n(x) = 4n^2 x\left(\frac{1}{n} - x\right)$$

när $0 \le x \le \frac{1}{n}$ och $f(x) = 0$ annars. Konvergerar följden $(f_n)$ punktvis? Konvergerar den likformigt? Existerar gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

4. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x+\frac{1}{n}x^2}\,dx.$$

Använd likformig konvergerns (kontrollera att vi verkligen har likformig konvergens!)

5. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}\,dx.$$

Använd likformig konvergerns (kontrollera att vi verkligen har likformig konvergens!) Kom också ihåg definitionen av talet $e$. När du bevisar likformig konvergens kan du tillämpa medelvärdessatsen på funktionen $f(t) = t^x = e^{x\ln t}$ (fixerat $x$.)

6. Vi antar att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och definierar funktionerna $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoren

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) + f(x-\frac{1}{n})}{2}.$$

(a) Anta att $f$ är kontinuerlig. Visa att följden $(f_n)$ konvergerar punktvis.

(b) Vi antar att $f$ är likformigt kontinuerlig. Visa att följden $(f_n)$ konvergerar likformigt.