INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 7
För veckan som börjar 21. 3. 2011

Extrapoäng för dem som deltar i handledningarna från och med den 21.3: deltagande i 4-5 handledningar ger 2 extrapoäng och deltagande i 3 handledningar ger 1 extra poäng.

1. Konvergerar eller divergerar (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1+\frac{1}{k}}{2})^k$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{k+1}{2k})^k$.

2. Konvergerar eller divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7+6k^4-5}{k^9+5k^3-3}$.

3. Konvergerar eller divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

4. Konvergerar eller divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

5. Konvergerar eller divergerar $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

6* Anta att $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 1$.
(a) Anta att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f$$

konvergerar. Visa att den oegentliga integralen

$$\int_1^{\infty} f$$

konvergerar.

(b) Anta att $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 1$. Anta dessutom att integralen $\int_1^{\infty} f$ konvergerar.
(i) Gäller då nödvändigtvis att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?
(ii) Är funktionen f nödvändigtvis begränsad?
Det lönar sig att betrakta t.ex. funktionen $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$, där det för alla $k = 1, 2, \ldots$ gäller att $f(x) = k - 2k^4|x-(k+\frac{1}{2})|$ när $k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^3} \leq x \leq k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k^3}$, och $f(x) = 0$ annars. (Skissera grafen!)