INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 4
För veckan som börjar 14 . 2. 2011.

1. Beräkna
$$\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx.$$

2. Beräkna
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\, dx.$$

Tips: kvadratkomplettera under roten, modifiera integranden till formen $\sqrt{1-p(x)^2}$ och substituera sedan $p(x) = \sin t$.

3. Bestäm längden av grafen för funktionen $f(x) = x^2$ mellan punkterna $x = 0$ och $x = 1$ med hjälp av Korollarium 9.11 på sidan 44.

Tips: i integralen kan det löna sig att substituera $x = \frac{1}{2}\sinh t$.

4. Varför måste
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\, dx$$
tolkas som en oegentlig integral? Konvergerar eller divergerar den?

5. Vi antar att funktionen $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ är strängt växande och deriverbar samt att dess derivata är kontinuerlig i $[1,3]$. Vi antar dessutom att $f(1) = 2$ och $f(3) = 5$, samt att $\int_1^3 f(t)\, dt = 8$. Beräkna inversfunktionens integral
$$\int_2^5 f^{-1}(x)\, dx.$$

Tips: Substituera $x = f(t)$ i inversfunktionens integral. Utrycket $tf'(t)$ som sedan kommer emot lönar det sig att integrera partiellt. Rita bild!

6. Vi antar att andra derivatan f'' för funktionen f är kontinuerlig i $]-1,1[$. Vi antar att $x \in]0,1[$. (a) Kontrollera först att ekvationen
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$
gäller när $x \in]0,1[$. (b) Tillämpa sedan partiell integrering genom att tänka att $f'(t) = 1f'(t)$ och att 1 är derivatan av uttrycket $-(x-t)$ med avseende på t. Resultatet borde vara av typen $f(x) = f(0) + xf'(0) +$ en integral. (Obs: resultatet gäller även när $x \in]-1,0[$.