

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys II

Övning 11

För veckorna som börjar 18. 4. och 25.4. 2011

Denna gång lönar det sig, om möjligt, att rita uppgifternas bilder med en grafisk räknare eller dator.

1. Beräkna enligt samma metod som i exemplet på sida 109 ett sådant gränsvärde för talet e att felets absolutbelopp är mindre än 10^{-5} .

2. Beräkna enligt samma metod som exemplet på sida 115 ett sådant gränsvärde för integralen

$$\int_0^1 e^{x^4} dx,$$

att felets absolutbelopp är mindre än 0,01.

3. Bilda Taylorpolynomet $T_2(x; e)$ för funktionen $f(x) = \ln x$ och utred med hjälp av detta

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{x}{e} - \ln x}{(x - e)^2}.$$

Kan du också bestämma gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x - \ln x^e}{(x - e)^2}?$$

4. Bilda lämpliga Taylorpolynom för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{\sin x}$, och utred med hjälp av dessa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^n},$$

där $n = 0, 1, 2, 3$ och 4 . (Här tolkar vi att $x^0 = 1$.)

5. Bilda Taylorpolynomet $T_4(x; 8)$ för funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ och utred hur bra uppskattning det ger för funktionen f i intervallet $[8, 10]$. Hur är det i intervallen $[8, 14]$ eller $[8, 18]$?

6. Graferna till funktionerna $\cos x$ och $2 - \cosh x$ när x är nära punkten $x = 0$. (Rita om möjligt dessa funktioners grafer t.ex. i intervallet $[-1/2, 1/2]$.) Försök förklara fenomenet genom att med Taylorpolynom undersöka skillnadsfunktionen $f(x) = \cos x - (2 - \cosh x)$. För vilka exponenter n existerar (det ändliga) gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}?$$