INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 10
För veckan som börjat 11. 4. 2011

1. Anta att konvergensradien för potensserien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$$

är 7. Vad är konvergensradien för serien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (x-3)^k ?$$

2. Vi betecknar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (x-1)^k .$$

Vad är seriens konvergensintervall? För vilka tal $a > 0$ konvergerar serien likformigt i intervallet $[1-a, 1+a]$? Beräkna $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ och $f'''(1)$.

3. Framställ funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x^5}$ som en potensserie som konvergerar i intervallet $]-1,1[$ och bestäm funktionens 15:e och 16:e derivata i punkten $x = 0$. Tips: geometrisk serie.

4. Vi antar att vi för alla k har att $|a_k| \leq |b_k|$. Försök formulera och bevisa ett samband mellan konvergensradierna för serierna $\sum a_k (x-x_0)^k$ och $\sum b_k (x-x_0)^k$.

5. Vi betecknar

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

och

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots .$$

Visa att dessa serier definierar funktioner $s(x)$ och $c(x)$ som är definierade på hela tallinjen, samt att vi för varje x har att $s'(x) = c(x)$ och $c'(x) = -s(x)$. (Det lönar sig att ta en titt på sidorna 122 och 123.)

6. (Fortsättning från föregående.) Visa (a) att vi för varje x och y har

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \text{ ja } c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

och (b) att

$$\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1.$$