

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Ohjaus 8

28. 3. 2011 alkavalle viikolle

1. Tarkastellaan funktioita $f_n(x) = x^n$ välillä $]0, 1[$.

Miten voidaan perustella, että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $f_n(x) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$?
(Vihje: Bernoullin epäyhtälö.)

2. Määritellään funktiot $f_n:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeilla $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$ kun $n = 1, 2, \dots$. Hahmottele kuva. Suppeneeko jono f_1, f_2, \dots pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

3. Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3 + n^4}} dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

4. Määritellään funktiot $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ehdoilla $f(x) = 0$ kun $x \leq \frac{1}{n+2}$ ja kun $x \geq \frac{1}{n}$. Väleillä $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$ ja $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ funktion kuvaaja on (edellisellä nouseva ja jälkimmäisellä laskeva) suora. Lopuksi tiedetään, että $f(\frac{1}{n+1}) = n$. Piirrä kuva!

Suppeneeko jono pisteittäin kohti erästä funktiota f ? Ovatko kaikki f_n sekä f jatkuvia? Onko suppeneminen tasaista?