MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 7, ratkaisuehdotuksia
21.3.2011 alkavalle viikolle

1. Suppenevatko sarjat

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \quad \text{ja} \quad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+1}{k^7+1}?$$

Ratkaisu. Vertailutesti sanoo, että jos kahden positiivitermisen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ termien suhde $\frac{x_k}{y_k}$ suppenee nollasta eroavaan reaalilukuun, kun k kasvaa rajatta, niin joko molemmat sarjat suppenevat tai molemmat hajaantuvat.

(a) Tarkastellaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}$ suppenemista. Koska osoittajan ja nimittäjän polynomien astelukujen erotus on 1, valitaan testisarjaksi harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, jonka tiedetään hajaantuvan. Nyt $\frac{k^2+1}{k^3+1} > 0$ ja $\frac{1}{k} > 0$, kun $k \geq 1$ sekä termien suhteelle on

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^2+1}{k^3+1}}{\frac{1}{k}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k(k^2+1)}{k^3+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^3}} = 1. \end{aligned}$$

Siis vertailutestin nojalla tarkasteltava sarja hajaantuu.

(b) Tarkastellaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+1}{k^7+1}$ suppenemista. Valitaan vastaavasti kuin yllä testisarja; tällä kertaa yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, joka suppenee tunnetusti. Nyt $\frac{k^5+1}{k^7+1} > 0$ ja $\frac{1}{k^2} > 0$, kun $k \geq 1$ sekä termien suhteelle on

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^5+1}{k^7+1}}{\frac{1}{k^2}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2(k^5+1)}{k^7+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k^5}}{1+\frac{1}{k^7}} = 1. \end{aligned}$$

Siis vertailutestin nojalla tarkasteltava sarja suppenee.

2. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2+1)}{k^2+1}?$$

Ratkaisu. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2+1)}{k^2+1}$ termit ovat vaihtuvamerkkiset, joten minorantti/majorantti -periaatetta tai vertailutestiä ei voi soveltaa sen suppenemisen tarkasteluun. Tiedetään kuitenkin, että $|\sin x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten mielivaltaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\sin(k^2+1)}{k^2+1} \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},
\end{aligned}$$

sillä sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ tiedetään suppenevan. Siis sarja, jonka termit ovat tarkasteltavan sarjan itseisarvot, suppenee majoranttiperiaatteen nojalla, joten tarkasteltava sarja suppenee itseisesti.

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(\sqrt{k+1})}?$$

Ratkaisu. Kyseessä vuorotteleva sarja, ts. sarjan peräkkäiset termit ovat erimerkkiset, sillä $\ln(\sqrt{k+1}) \geq 0$ kun $k \geq 0$. Lisäksi funktiot $\ln x$ ja $\sqrt{x}$ ovat molemmat aidosti kasvavia ja kasvavat rajatta muuttujan kasvaessa rajatta, joten myös niiden yhdiste $\ln\sqrt{x}$ on aidosti kasvava ja rajatta kasvava. Erityisesti tällöin

$$\frac{1}{\ln(\sqrt{k})} \geq \frac{1}{\ln(\sqrt{k+1})} \geq 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(\sqrt{k+1})} = 0.$$

Siis Leibnizin testin nojalla tarkasteltava sarja suppenee.

4. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k?$$

Ratkaisu. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ jokainen termi on korotettu indeksiään vastaavaan potenssiin. Lisäksi $\frac{k+1}{2k+1} \geq 0$, kun $k \geq 1$, joten voidaan käyttää juuritestiä raja-arvomuodossa. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Siis juuritestin raja-arvomuodon nojalla tarkasteltava sarja suppenee.

Vaihtoehtoisesti voidaan löytää esimerkiksi edellä todetun suppenemisen nojalla $k_0 \in \mathbb{N}$, jolle

$$\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k} < \frac{3}{4}$$

aina, kun $k \geq k_0$. Tällöin, koska on $\frac{3}{4} < 1$, tarkasteltava sarja suppenee juuritestin perusteella.