MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 4
14.2.2011 alkavalle viikolle

1. Määritä kaikki funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ integraalifunktiot, kun $f(x) = 0$ kun $0 \leq x \leq 1$ ja $f(x) = x - 1$ kun $1 < x \leq 2$. (Intergaalifunktio on funktio, jonka derivaattafunktio tehtävän funktio on.)

2. Tarkastellaan funktiota $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$ kun $x \neq 1$ ja $f(1) = 3$.
(a) Onko f Riemann-integroituva?
(b) Onko funktiolla f integraalifunktioita?
(Tässä saa käyttää tietoa, ettei derivaattafunktiolla voi olla ”hyppykohtia”. Muistatko, miten moinen ominaisuus perustellaan?)

Tarkastellaan funktiota $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ kun $x \neq 0$ ja $g(0) = 0$.
(c) Onko g derivoituva?
(d) Onko g' Riemann-integroituva?

3. Tutustu lauseen 4.11 (S. 12) todistamiseen seuraavan esimerkin valossa. Oletetaan, että $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 2]$ ja $f(1) > 0$. Osoita, että

$$\int_0^2 f(x)\, dx > 0.$$

Tarkoitus on siis toimia kuten lauseen 4.11 todistuksessa. Osaatko esittää lauseen 4.11 seurauksena tälle tulokselle (ja siis monisteen seurauslauseelle 4.12) ?

4. Osoita, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva, jos kaikilla x pätee $f(x) = \sqrt[17]{x}$.