MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 3, ratkaisuehdotuksia
Lauri Sankari
7.2.2011 alkavalle viikolle

1. Laske

$$\int_1^e \frac{x^4+x+1}{x^2}\,dx.$$

*Ratkaisu*: Tehtävän integrandi voidaan jakaa termeittäin, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{x^4+x+1}{x^2}\,dx &= \int_1^e x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \Big/_{1}^{e} \frac{x^3}{3}+\ln x-\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{e^3}{3}+\ln e-\frac{1}{e}-(\frac{1^3}{3}+\ln 1-\frac{1}{1})) \\
&= \frac{e^3}{3}-\frac{1}{e}+\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

2. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \le e-1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. Tieto, että $x^2 \le x$ kaikilla $x \in [0,1]$ auttaa.

*Ratkaisu.* Analyysi I:n tietojen perusteella funktio $e^x$ on kasvava: Jos $x \le y$, niin $e^x \le e^y$. Koska kaikilla $x \in [0,1]$ on $x^2 \le x$, niin erityisesti pätee $e^{x^2} \le e^x$ kaikilla $x \in [0,1]$. Toisaalta funktiot $e^{x^2}$ ja $e^x$ ovat jatkuvina funktioina integroituvia, joten lauseen 4.2 nojalla integrointi säilyttää suuruusjärjestyksen. Tällöin

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \le \int_0^1 e^x dx = \Big/_{0}^{1} e^x = e-1.$$

3. Laske osamurtojen avulla

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)}.$$

*Ratkaisu.* Rationaalifunktioiden yhteenlaskusääntöjen nojalla tehtävän tulomuotoinen integrandi voidaan esittää summana

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}.$$

Ratkaistaan vakiot $A$ ja $B$ laventamalla ensin yhtälön molemmat puolet samannimisiksi ja järjestelemällä sen jälkeen osoittajat samanmuotoisiksi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+3)(x-5)} &= \frac{A(x-5)+B(x+3)}{(x+3)(x-5)} \\
\iff 1 &= A(x-5)+B(x+3) \\
1 &= (A+B)x + (3B-5A)
\end{aligned}$$

Yhtälön vasemmalla puolella ei esiinny muuttujaa $x$ lainkaan, joten on oikealla puolellakin muuttujan kertoimen on oltava 0. Vastaavasti yhtäön molemmilla puolilla vakiotermin tulee olla 1. Siis saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3B-5A=1. \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan $A = -\frac{1}{8}$ ja $B = \frac{1}{8}$. Koska $x+3 \neq 0$ ja $x-5 \neq 0$ integrointivälillä $[0,1]$, voidaan integraali laskea osamurtojen avulla

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)} &= \frac{1}{8}\int_0^1 -\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-5}\,dx \\
&= \frac{1}{8} \Big/_0^1 -\ln|x+3| + \ln|x-5| \\
&= \frac{1}{8}\left(-\ln 4 + \ln 4 - (-\ln 3 + \ln 5)\right) \\
&= \frac{1}{8}\ln\left(\frac{3}{5}\right).
\end{aligned}$$

4. Derivoi

$$\int_1^{e^{x^2}} \ln t \, dt.$$

Tätä kannattaa ajatella yhdistettynä funktiona.

*Ratkaisu.* Merkitään

$$f(x) = \int_1^{e^{x^2}} \ln t \, dt$$

Määritellään apufunktiot

$$g(x) = \int_1^{x} \ln t \, dt \text{ ja } h(x) = e^{x^2}.$$

Koska funktio $\ln x$ on jatkuva kaikilla $x > 0$, lauseen 4.18 nojalla funktio $g$ on määritelty ja pätee $g'(x) = \ln x$ kaikilla $x > 0$. Nyt funktio $f = g \circ h$ on määritelty (itse asiassa kaikilla reaaliluvuilla), joten ketjusäännön nojalla saadaan $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$. Siis

$$f'(x) = \ln e^{x^2} \cdot 2xe^{x^2} = x^2 \cdot 2xe^{x^2} = 2x^3e^{x^2}.$$