MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 11, ratkaisuehdotuksia
18.4.2011 alkavalle viikolle

1. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt[5]{x}$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_4(x;1)$.

Ratkaisu. Tehtävän funktiolla on kaikkien kertalukujen derivaatat, kun $x > 0$. Erityisesti tällöin $f \in C^4((0,2))$, joten kysytty Taylorin polynomi on olemassa kyseisellä välillä ja on määritelty kaavalla

$$T_4(x;1) = f(1) + \sum_{k=1}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k.$$

Lasketaan funktion f neljä ensimmäistä derivaattaa pisteessä 1.

$$f^{(1)}(1) = f'(1) = \frac{1}{5}1^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5},$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(1) &= -\frac{4}{25}1^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{25}, \\ f^{(3)}(1) &= \frac{36}{125}1^{-\frac{14}{5}} = \frac{36}{125}, \\ f^{(4)}(1) &= -\frac{504}{625}x^{-\frac{19}{5}} = -\frac{504}{625}. \end{aligned}$$

Lisäksi $f(1) = 1$. Sijoittamalla saadut arvot Taylorin polynomin lausekkeeseen saadaan

$$\begin{aligned} T_4(x;1) &= 1 + \frac{1}{5\cdot 1!}(x-1) - \frac{4}{25\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{36}{125\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{504}{625\cdot 4!}(x-1)^4 \\ &= 1 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{2}{25}(x-1)^2 + \frac{6}{125}(x-1)^3 - \frac{21}{625}(x-1)^4. \end{aligned}$$

2. Määritä jokin n, jolle funktion $f(x) = e^x$ Taylorin polynomin $\mathrm{T}_{n-1}(x;0)$ arvot poikkeavat alle 10^{-3} arvoista e^x kaikilla $x \in [-2,2]$.

Ratkaisu. Kun $x \in [-2, 2]$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin Taylorin kaavan nojalla $f(x) = T_{n-1}(x; 0) + R_n(x; 0)$. Koska eksponenttifunktion kaikkien kertalukujen derivaatta on eksponenttifunktio itse, jäännöstermin $R_n(x; 0)$ Lagrangen muotoa voidaan käyttää. Voidaan kirjoittaa

$$R_n(x, 0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{e^\xi}{n!}x^n,$$

missä ξ on 0:n ja x:n välissä. Riittää siis löytää jokin n, jolla kaikilla $x \in [-2, 2]$ pätee

$$|f(x) - T_{n-1}(x, 0)| = |R_n(x, 0)| = \left|\frac{e^\xi}{n!}x^n\right| = \frac{e^\xi |x|^n}{n!} < 10^{-3}.$$

Kun $x \in [-2, 2]$, niin $|x| \leq 2$ ja myös $\xi \in [-2, 2]$, joten $e^\xi \leq e^2$. Siis jäännöstermille saadaan arvio

$$\frac{e^\xi |x|^n}{n!} \leq \frac{e^2 \cdot 2^n}{n!} \leq \frac{9 \cdot 2^n}{n!}.$$

Kokeilemalla saadaan

$$\frac{9 \cdot 2^{10}}{10!} = \frac{9 \cdot 1024}{3628800} > 10^{-3}$$

ja

$$\frac{9 \cdot 2^{11}}{11!} = \frac{9 \cdot 2048}{39916800} < 10^{-3},$$

joten $n = 11$ on pienin kokonaisluku, jolla haluttu arvio saadaan aikaiseksi.

3. Muodosta funktiolle $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ Taylorin kehitelmät $f(x) = T_n(x; 0) + x^n \varepsilon(x)$ tapauksissa $n = 2, 3$ ja 4.

Ratkaisu. Funktion f kysyttyjen Taylorin polynomien muodostamiseksi lasketaan funktion neljä ensimmäistä derivaattaa origossa. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f^{(1)}(x) = b + 2cx + 3dx^2,\ f^{(2)}(x) = 2c + 6dx,\ f^{(3)}(x) = 6d \text{ ja } f^{(4)}(x) = 0,$$

joten kysytyt derivaatat ovat

$$f^{(1)}(0) = b,\ f^{(2)}(0) = 2c,\ f^{(3)}(0) = 6d \text{ ja } f^{(4)}(0) = 0.$$

Siis haluttuja Taylorin kehitelmiä vastaavat polynomit ovat

$$\begin{aligned}
T_2(x;0) &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \\
&= a + bx + cx^2, \\
T_3(x;0) &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\
&= a + bx + cx^2 + dx^3, \\
T_4(x;0) &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\
&= a + bx + cx^2 + dx^3.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan kirjoittaa halutut Taylorin kehitelmät. Indeksin arvolla $n = 2$ saadaan

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\
&= \underbrace{a + bx + cx^2}_{T_2(x;0)} + x^2 \cdot \underbrace{dx}_{\varepsilon(x)}.
\end{aligned}$$

Edelleen, kun $n = 3$ ja $n = 4$, niin

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\
&= \underbrace{a + bx + cx^2 + dx^3}_{T_3(x;0)} + x^3 \cdot \underbrace{0}_{\varepsilon(x)}.
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\
&= \underbrace{a + bx + cx^2 + dx^3}_{T_4(x;0)} + x^4 \cdot \underbrace{0}_{\varepsilon(x)}.
\end{aligned}$$

4. Muodosta funktiolle $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ Taylorin kehitelmä $f(x) = T_3(x;0) + x^3\varepsilon(x)$. Miltä ”epsilon-lauseke”näyttää? Tehtävässä oletetaan, että ko. potenssisarjan suppenemissäde on positiivinen.

Ratkaisu. Koska suppenemissäde R oletettiin positiiviseksi, löytyy väli $(-R, R)$, jolla kyseinen potenssisarja on määritelty. Monisteen sivun 97 lauseen 2.5 nojalla kyseisellä välillä potenssisarja voidaan derivoida termeittäin, ja sillä on näin kaikkien kertalukujen derivaatat. Erityisesti funktion kolme ensimmäistä derivaattaa origossa ovat

$$\begin{aligned} f'(0) &= a_1 \\ f''(0) &= 2!a_2 = 2a_2 \\ f^{(3)}(0) &= 3!a_3 = 6a_3 \end{aligned}$$

Nyt Taylorin polynomin $T_3(x;0)$ lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} T_3(x;0) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &= 0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \end{aligned}$$

Tästä ja Taylorin kehitelmästä $f(x) = T_3(x;0) + x^3\varepsilon(x)$ saadaan nyt ratkaistua "epsilon-lausekkeen"$\varepsilon(x)$ muoto. Kun $x \neq 0$, niin

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - T_3(x;0)}{x^3} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{3} a_k x^k}{x^3} = \sum_{k=4}^{\infty} a_k x^{k-3}.$$

Summalauseke $\sum_{k=4}^{\infty} a_k x^{k-3}$ voidaan kirjoittaa myös muotoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+3} x^k$, jolloin funktion f kysytty Taylorin kehitelmä on

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{3} a_k x^k}_{T_3(x;0)} + x^3 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+3} x^k}_{\varepsilon(x)}.$$