MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II, 2011
Harjoittelua 2. kurssikoetta varten

1. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-2}?$$

2. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 \ln k}}?$$

Vertaa esim. epäoleelliseen integraaliin.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7+\sin(k!)}{\sqrt{k}}?$$

4. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^k)}{k^2}?$$

Muista itseisen suppenemisen merkitys.

5. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{3+k^4}?$$

6. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+6k+1}{k^6+5k+1}?$$

7. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(\sqrt{k})}?$$

8. Onko olemassa sarjaa, jonka osasummien jono on $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^4}, \ldots$?

9. Määritä ne x, joilla

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx^2}$$

suppenee. Vihje: Muistele geometrista sarjaa.

10. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}.$$

11. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{k!}}.$$

12. Oletetaan, että positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee. Osoita , että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_k}}{k}$$

suppenee.

13. Oletetaan, että $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ ja $f : \Delta \to \mathbb{R}$ ja että $f_n \to f$ tasaisesti, kun $n \to \infty$. Miksi $f_n \to f$ pisteittäin, kun $n \to \infty$.

14. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

15. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla $f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{x}$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

16. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}\sin^4 x + 7}\, dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

17. Suppeneeko sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ tasaisesti välillä $]-1,0[$?
Vihje: geometrinen sarja.

18. Millaisen summakaavan saat tutkimalla geometrisen sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ kolmatta derivaattaa? Vihje: vertaa monisteen esimerkkiin.

19. Onko olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee, että $f(0) = 2008$, $f'(0) = 2007$, $f''(0) = 2006$ ja jolle $f^{(n)}(0) = 0$ kaikilla $n \geq 3$?

20. Onko olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee, että $f(0) = 2008$, $f'(0) = 2007$, $f''(0) = 2006$ ja jolle $f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}$ kaikilla $n \geq 3$?

21. Laske
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-\frac{1}{n})^{nx}\,dx.$$
Käytä tasaista suppenenmista (tarkista se!) Muista myös luvun e määritelmä.

22. Oletetaan, että $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva ja määritellään funkiot $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ehdolla $f_n(x)=f(x+\frac{1}{n})$. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.

23. Oletetaan, että $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva kaikilla $n=1,2,\ldots$ ja että $f_n\to f$ tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva.

24. Millä luvuille $a>0$ pätee, että sarja
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}x^k$$
(a) suppenee välillä $]-a,a[$;

(b) suppenee tasaisesti välillä $[-a,a]$?

25. Oletetaan, että $a<0$. Suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{kx}$$
tasaisesti välillä $]-\infty,a]$?

26. Millä x sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-3)^k}{k}$$
suppenee? Vihje: tutki sivun 91 esimerkkiä 1.3.

27. Millä x sarja $\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k$ suppenee? Vihje: sivun 94 lause 1.8; tarkastele suppenemisvälin päätepisteitä erikseen.

28. Määritä sarjan
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k-1}{k})^{k^2}x^k$$
suppenemissäde ja suppenemisväli. Vihje: sivun 94 lause 1.8.

29. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-11)^k$, missä kertoimet a_k määritellään seuraavasti: $a_0=1$ ja
$$a_{k+1}=(1+\frac{1}{k})^k a_k$$
kaikilla $k=0,1,2,\ldots$. Määritä sarjan suppenemissäde ja suppenemisväli. (Vihje: lause 1.8 sivulla 94.)

30. Tarkastellaan edellisen tehtävän sarjan summana määriteltyä funktiota $f(x)$ välillä $]11-R, 11+R[$. Laske arvot $f(11)$, $f'(11)$, $f''(11)$ ja $f'''(11)$. (Vihje: lause 2.5 sivulla 97.)

31. Esitä funktio
$$f(x) = \frac{1}{1-x^7}$$
potenssisarjana, joka suppenee välillä $]-1,1[$ ja määritä tämän avulla funktion 10. derivaatta kohdassa $x = 0$.

32. Muodosta sivun 104 esimerkin tapaan sellainen likiarvo luvulle e^2, että virheen itseisarvo on pienempi kuin 10^{-20}. Likiarvosta tulee äärellinen summa. Sitä ei täydy sieventää. Onko saatu likiarvo rationaaliluku? (Oleta pohjaksi tieto $2 < e < 3$.)

33. Laske sivun 110 esimerkin tapaan sellainen likiarvo integraalille
$$\int_0^1 e^{x^4}\,dx,$$
että virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01.

34. Oletetaan, että $x \in [-1,1]$. Arvioi Taylorin polynomien avulla erotusta $\sinh x - (2x - \sin x)$. (Voidaan osoittaa, että se on pienempi kuin $0,0006$. Jos sinulla on käytettävissäsi graafinen laskin tai osaat käyttää esim Maplea, niin kannattaa piirtää kuva.)

35. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt[5]{x}$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_3(x;1)$. Kuinka hyvän likiarvon se antaa juurille $\sqrt[5]{x}$ kun $x \in [1,2]$?

36. Tarkastellaan funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Taylorin polynomeja $\mathrm{T}_n(x;8)$. Suppeneeko niiden muodostama jono tasaisesti välillä kun $[8,10]$?

37. Selvitä Taylorin polynomien avulla
$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - x\cos x}{e^x - 1}.$$

38. Selvitä
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x}$$
käyttämällä funktion $\cos t$ sopivaa Taylorin polynomia, jossa $x_0 = 0$.

39. Onko olemassa raja-arvoja
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3},\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^4} \ \text{ja} \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4}?$$