

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II, 2011
Harjoittelua 1. kurssikoetta varten

1. Laske

$$\int_1^3 x^2 e^{x^3} dx.$$

Tunnista yhdistetyn funktion derivaatta.

2. Laske

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Syksyn monisteen sivu 85 auttaa.

3. Laske

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

4. Laske (esim. osittaisintegroinnilla)

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

5. Laske (esim. osittaisintegroinnilla)

$$\int_1^e x \ln x dx.$$

6. Laske (esim. osittaisintegroinnilla)

$$\int_1^e \cos(\ln x) dx.$$

7. Laske (esim. osittaisintegroinnilla)

$$\int_0^{\pi/3} e^x \cos x dx.$$

8. Laske

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Syksyn monisteen viimeistä sivua kannattaa vilkaista . . .

9. Laske

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

sijoituksella $x = \sinh t$. (Tutki syksyn monisteen sivua 83.)

10. Laske

$$\int_0^1 \sqrt{2+3x^2} dx$$

sijoituksella edellisen tehtävän tapaan.

11. Laske

$$\int_2^3 \frac{x+1}{x^2+1} dx.$$

12. Laske

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x+1} dx.$$

13. Laske

$$\int_1^e \frac{x^4+2x+3}{4x^2} dx.$$

14. Derivoi

$$f(x) = \int_{e^x}^{e^{x^2}} e^{t^2} dt$$

(kun $x > 1$.)

15. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{\sin x} dx \leq e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. (Osoita ensin väliarvolauseen avulla, että $\sin x \leq x$ kaikilla $x \in [0, 1]$.)

16. Laske

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x^2+3)} dx$$

etsimällä luvut A , B ja C , joille

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx}{x^2+3} + \frac{C}{x^2+3}.$$

17. Oletetaan, että funktio $f : [1, 3] \rightarrow [2, 4]$ on aidosti kasvava ja derivoituva sekä sen derivaatta jatkuva välillä $[1, 3]$, ja että $f(1) = 2$ ja $f(3) = 4$.

Laske

$$\int_2^4 f^{-1}(x) dx + \int_1^3 f(t) dt.$$

Vihje: Sijoita käänteisfunktion integraaliin $x = f(t)$. Lausekkeeseen $tf'(t)$ kannattaa soveltaa osittaisintegrointia. Piirrä kuva!

18. Tarkastellaan funktota $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x) = 2$ kun $x \neq 1$ ja $f(1) = -5$. Anna esimerkki välin $[0, 2]$ jaosta D , jolla pätee $S_D - s_D < 2^{-100}$.
19. Tutkitaan funktiota $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ missä $f(x) = e^{\sin x}$. Anna esimerkki jaosta D , jolla $S_D - s_D < 10^{-100}$. Vihje: tarkastele tasavälistä jakoja. Kannattaa muistella luentoja tai katsoa monisteen esimerkkiä 2.8.
20. Selvitä Riemann-integraalin määritelmän perusteella

$$\int_{-1}^1 3x \, dx.$$

21. Selvitä Riemann-integraalin määritelmän perusteella

$$\int_0^1 e^x \, dx.$$

Vihjeitä: Käytä tasavälistä jakoa. Sovella geometrisen jonon summakaavaa. Huomaa, että

$$\frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \rightarrow -1$$

kun $n \rightarrow \infty$ (koska kyseessä erotusosamäärän vastaluku).

22. Määritellään $f(x) = \cos \frac{1}{e^x}$ kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$. Osoita, että f on integroitava välillä $[0, 1]$. Osaatko muotoilla tehtävän tuloksen yleiseksi teoreemaksi? Katso tehtävälistan loppua: siellä kaksikin mahdollisuutta.
23. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(e^x) + 1}{x^2} \, dx?$$

24. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2(e^x)}{x^2} \, dx?$$

25. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{\cos(e^x)}{x^2} \, dx?$$

Vihje: itseinen suppeneminen.

26. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) dx?$$

27. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_1^{\infty} \frac{x^7}{e^x} dx?$$

Vihje: Huomaa, että $e^x > x^9$ kun x on kyllin suuri. (Muistatko syksyn kurssilta, mistä tämä seuraa?)

28. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx?$$

Vihje: Seuraus 2.3 sivulla 53.

29. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(e^x)}{x^2} dx?$$

30. Oletetaan, että $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, $f(0) = 0$, ja että $f'(0) = 3$. (Tässä tarkoitetaan oikeanpuoleista derivaattaa.) Osoita, että

$$\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

hajaantuu.

31. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x}$$

32. Onko funktio $f(x) = x^7$ tasaisesti jatkuva välillä (a) $] -1, 3[$; (b) $] -1, \infty[$?

33. Onko funktio $f :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tasaisesti jatkuva, jos kaikilla $x > 1$ on $f(x) = \ln x$?

34. Onko funktio $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ tasaisesti jatkuva, jos $f(x) = \ln x$ kun $0 < x < 1$?

35. Onko funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tasaisesti jatkuva, jos kaikilla x on $f(x) = \sqrt[13]{x}$?

36. (Kaksi vastausta tehtävän 22 yhteydessä olleeseen kysymykseen.) Oletetaan, että f on rajoitettu välillä $[0, 1]$. Oletetaan lisäksi, että joko (a) f on jatkuva välillä $]0, 1]$, tai (b) f on integroitava jokaisella välillä $[c, 1]$ missä $0 < c < 1$. Osoita, että f on integroitava välillä $[0, 1]$.