MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 9, ratkaisuehdotuksia
4. 4. 2011 alkavalle viikolle
Lauri Sankari

1. Anna esimerkki potenssisarjasta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ jonka suppenemissäde on 7. Vihje: tutkaile geometrisia sarjoja.

Ratkaisu. Noudatetaan vihjettä ja tehdään yrite $a_k = q^k$, missä $q \in \mathbb{R}$. Nyt tarkasteltava potessisarja saadaan muotoon $\sum_{k=0}^{\infty}(q(x-3))^k$. Siis kyseessä on geometrinen sarja, jonka tiedetään suppenevan, kun $|q(x-3)| < 1$ ja hajaantuvan, kun $|q(x-3)| \geq 1$. Koska nyt halutaan sarjan suppenevan, kun $|x-3| < 7$, saadaan rajatapausta $|q(10-3)| = 1$ tarkastelemalla $7q = 1$, eli $q = \frac{1}{7}$. Siis $a_k = \left(\frac{1}{7}\right)^k$.

Tarkastetaan vielä, että näin saadut kertoimet a_k todellakin antavat vaaditun suppenemissäteen. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{1}{7}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{7}} = 7,$$

joten luentomonisteen sivun 94 lauseen 1.8 nojalla sarjan suppenemissäde on 7. Siis $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k (x-3)^k$ on eräs esimerkkisarja.

2. Millä x sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-4)^k$ suppenee? Vihje: tutki sivun 91 esimerkkiä 1.3.

Ratkaisu. Muuttujan arvolla $x = 5$ sarja tulee muotoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(5-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

joten se suppenee (tunnetusti) Leibnizin lauseen nojalla. Vastaavasti muuttujan arvolla $x = 3$ sarja on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(3-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

ts. hajaantuvaksi tiedetty harmoninen sarja. Nyt Abelin lauseen nojalla sarja suppenee, kun $|x-4| < 1$, ja hajaantuu, kun $|x-4| > 1$, joten sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in (3,5]$.

3. Millä x sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(-k)^{2011}(x-5)^k$ suppenee? Vihje: sivun 94 lause 1.8; tarkastele suppenemisvälin päätepisteitä erikseen.

Ratkaisu. Huomataan aluksi, että $(-k)^{2011} = (-1)^{2011}k^{2011} = -k^{2011}$. Nyt

$$\frac{1}{\sqrt[k]{|-k^{2011}|}} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^{2011}} \to 1, \text{ kun } k \to \infty.$$

Siis monisteen lauseen 1.8 nojalla sarjan suppenemissäde on 1 ja suppenemisväli siten $(4,6)$. Tarkastellaan vielä suppenemista suppenemisvälin päätepisteissä. Kun $x = 4$, sarja on

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-k)^{2011}(4-5)^k = \sum_{k=0}^{\infty}k^{2011}(-1)^{k+1},$$

joka hajaantuu, sillä $|k^{2011}(-1)^{k+1}| \to \infty$, kun $k \to \infty$. Vastaavasti sarja hajaantuu, kun $x = 6$. Siis potenssisarja suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in (4,6)$.

4. Määritä sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{k+1}{k})^{k^2}(x-6)^k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k}{k+1})^{k^2}(x-7)^k$ suppenemissäteet ja suppenemisvälit. Vihje: sivun 94 lause 1.8.

Ratkaisu. Ensimmäisen sarjan kertoimille pätee

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(\frac{k+1}{k})^{k^2}}} = \frac{1}{(\frac{k+1}{k})^k} \to \frac{1}{e}, \text{ kun } k \to \infty.$$

Siis luentomonisteen sivun 94 lauseen 1.8 nojalla sarjan suppenemissäde on $\frac{1}{e}$, jolloin suppenemisväliksi saadaan $(6-\frac{1}{e}, 6+\frac{1}{e})$.

Vastaavasti jälkimmäisen potenssisarjan kertoimille pätee, kun $k \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(\frac{k}{k+1})^{k^2}}} = \frac{1}{(\frac{k}{k+1})^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \to e, \text{ kun } k \to \infty.$$

Nyt saman lauseen nojalla sarjan suppenemissäde on e ja suppenemisväli $(7-e, 7+e)$.

5. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-8)^k$, missä kertoimet a_k määritellään seuraavasti: $a_0 = 1$ ja

$$a_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{k+2}\right)^k a_k$$

kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Määritä sarjan suppenemissäde ja suppenemisväli. (Vihje: lause 1.8 sivulla 94.)

Ratkaisu. Tarkasteltavan potenssisarjan peräkkäisten kerrointen suhteelle pätee

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+2}}\right| = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{k+2}\right)^k} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k \to e, \text{ kun } k \to \infty.$$

Siis monisteen lauseen 1.8 nojalla sarjan suppenemissäde on e ja suppenemisväli $(8-e, 8+e)$.

Huomautus. Alkuperäisessä muodossaan tehtävän rekursiokaava oli $a_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k a_k$, joka antoi kertoimelle a_1 arvon

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{1}\right)^0 a_0 = 0^0.$$

Kaikkein intuitiivisimmin saadaan siis $a_1 = 0$, jolloin jokainen kerroin, jolla on suurempi indeksi, on rekursiokaavan nojalla myöskin 0. Erityisesti sarja tulee muotoon $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-8)^k = (x-8)^0 = 1$. Siis tehtävän potenssisarja kuvaa vakiofunktiota $f(x) = 1$ ja suppenee kaikkialla.

Toisinaan analyysissä kuitenkin määritellään $0^0 = 1$, jolloin tehtävän ratkaisu alkuperäisessä muodossa olisi ollut samanlainen kuin korjattuna.

6. Tutkitaan monisteen sivua 88: Muodosta äärellinen summa (ei täydy sieventää), jonka arvo on rationaaliluku q, jolle pätee $|e - q| < 10^{-15}$. (Laskinta saa käyttää apuna kertomalausekkeiden tarkastelussa.)

Ratkaisu. Monisteen sivun 88 mukaan eksponenttifunktio voidaan esittää sarjana: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

missä ensimmäisen summan arvo rationaaliluku, sillä jokainen summattava on rationaaliluku. Siis arvioimalla jäännöstermiä saadaan haluttu tarkkuus aikaiseksi. Samaisen sivun mukaan jäännöstermille pätee

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!n}.$$

Valitsemalla 10^{15} saadaan haluttu tarkkuus ongelmitta. Tarkempi arvio saadaan laskemalla lausekkeen $n!n$ arvoja. Tällöin huomataan, että $16! \cdot 16 \approx 3,35 \cdot 10^{14}$ ja $17! \cdot 17 \approx 6,05 \cdot 10^{15}$, joten 17 on pienin kokonaisluku, jolla $q = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ toteuttaa epäyhtälön annetulla arviolla.