MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 8
28. 3. 2011 alkavalle viikolle

1. Tarkastellaan funktioita $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

2. Tarkastellaan funktioita $f_n\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

3. Tarkastellaan funktioita $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdoilla

$$f_n(x) = 4n^2x(\frac{1}{n} - x)$$

kun $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ ja $f(x) = 0$ muuten. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti? Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx?$$

4. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x+\frac{1}{n}x^2}\, dx.$$

Käytä tasaista suppenenmista (tarkista se!)

5. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+\frac{1}{n})^{nx}\, dx.$$

Käytä tasaista suppenenmista (tarkista se!) Muista myös luvun e määritelmä. Tasaisen suppenemisen todistuksessa voi soveltaa väliarvolausetta funktioon $f(t) = t^x = e^{x \ln t}$ (kiinteällä x.)

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja määritellään funkiot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) + f(x-\frac{1}{n})}{2}.$$

(a) Oletetaan, että f on jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee pisteittäin.
(b) Oletetaan, että f on tasaisesti jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.