MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 4
14 . 2. 2011 alkavalle viikolle

1. Laske

$$\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx.$$

2. Laske

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\, dx$$

Vihje: suorita juuren alla neliöksi täydentäminen ja muokkaa integroitava muotoon $\sqrt{1-p(x)^2}$ ja sijoita sitten $p(x) = \sin t$.

3. Määritä sivulla 41 olevan seurauslausee 9.11. avulla funktion $f(x) = x^2$ kohtien $x = 0$ ja $x = 1$ väliin jäävän kuvaajan osan pituus. Vihje: integraalissa kannattaa käyttää sijoitusta $x = \frac{1}{2}\sinh t$.

4. Miksi

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\, dx$$

täytyy tulkita epäoleelliseksi integraaliksi? Suppeneeko vai hajaantuuko se?

5. Oletetaan, että funktio $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja derivoituva sekä sen derivaatta jatkuva välillä $[1,3]$ Oletetaan lisäksi, että $f(1) = 2$ ja $f(3) = 5$ ja että$\int_1^3 f(t)\, dt = 8$. Laske käänteisfunktion integraali

$$\int_2^5 f^{-1}(x)\, dx.$$

Vihje: Sijoita käänteisfunktion integraaliin $x = f(t)$. Vastaan tulevan lausekkeen $tf'(t)$ integroinnissa kannattaa käytää osittaisintegrointia. Piirrä kuva!

6. Oletetaan, että funktion f toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $]-1,1[$. Oletetaan, että $x \in]0,1[$. (a) Tarkista ensin, että yhtälö

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

pätee kun $x \in]0,1[$. (b) Sovella sitten tähän integraaliin osittaisintegrointia ajattelemalla, että $f'(t) = 1f'(t)$ ja että 1 on lausekkeen $-(x-t)$ derivaatta t:n suhteen. Tuloksen pitäisi olla muotoa $f(x) = f(0) + xf'(0) +$ integraali. (Huom: tulos pätee myös kun $x \in]-1,0[$.