

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Harjoitus 11

18. 4. ja 25.4. 2011 alkaville viikoille

Tällä kertaa tehtäviä kannattaa havainnollistaa graafisella laskimella tai tietokoneella piirretyillä kuvilla mikäli mahdollista.

1. Laske sivun 104 esimerkin tapaan sellainen likiarvo luvulle e , että virheen itseisarvo on pienempi kuin 10^{-5} .

2. Laske sivun 110 esimerkin tapaan sellainen likiarvo integraalille $\int_0^1 e^{x^4} dx$, että virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01.

3. Muodosta funktiolle $f(x) = \ln x$ Taylorin polynomi $T_2(x; e)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{x}{e} - \ln x}{(x - e)^2}.$$

Osaatko selvittää myös raja-arvon

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x - \ln x^e}{(x - e)^2}?$$

4. Muodosta funktioille $f(x) = e^x$ ja $g(x) = e^{\sin x}$ sopivat Taylorin polynomit ja tutki niiden avulla raja-arvoja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^n},$$

missä $n = 0, 1, 2, 3$ ja 4 . (Tässä tulkitaan $x^0 = 1$.)

5. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Taylorin polynomi $T_4(x; 8)$ ja tutki kuinka hyvän arvion se antaa funktiolle f välillä $[8, 10]$? Entä väleillä $[8, 14]$ tai $[8, 18]$?

6. Funktioiden $\cos x$ ja $2 - \cosh x$ kuvaajat kulkevat lähellä toisiaan kun x on lähellä kohtaa $x = 0$. (Piirrä jos mahdollista näiden kuvaajat esim. välillä $[-1/2, 1/2]$.) Yritä selittää ilmiö tutkimalla Taylorin polynomien avulla erotusfunktiota $f(x) = \cos x - (2 - \cosh x)$. Mille eksponenteille n on olemassa (äärellinen) raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}?$$