MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 10
11. 4. 2011 alkavalle viikolle

1. Oletetaan, että potenssisarjan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$$

suppenemissäde on 7. Mikä on sarjan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (x-3)^k$$

suppenemissäde?

2. Merkitään

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (x-1)^k.$$

Mikä on kyseisen sarjan suppenemissäde? Millä luvuille $a > 0$ pätee, että sarja suppenee tasaisesti välillä $[1-a, 1+a]$? Laske $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ ja $f'''(1)$.

3. Esitä funktio $f(x) = \frac{1}{1-x^5}$ potenssisarjana, joka suppenee välillä $]-1,1[$ ja määritä tämän avulla funktion 15. ja 16. derivaatta kohdassa $x = 0$. Vihje: geometrinen sarja.

4. Oletetaan, että kaikilla k pätee $|a_k| \le |b_k|$. Yritä muotoilla ja todistaa sarjojen $\sum a_k (x-x_0)^k$ ja $\sum b_k (x-x_0)^k$ suppenemissäteitä koskeva yhteys.

5. Merkitään

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

ja

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

Osoita, että nämä sarjat määrittelevät koko lukusuoralla funktiot $s(x)$ ja $c(x)$ ja, että kaikilla x pätee $s'(x) = c(x)$ ja $c'(x) = -s(x)$. (Kannattaa tutkia monisteen sivuja 116 ja 117.)

6. (Jatkoa edelliseen) Osoita, (a) että kaikilla x ja y pätee

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \text{ ja } c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

ja (b), että

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1.$$