MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 7, Esimerkkiratkaisuja, 5 sivua
Kaarlo Reipas

1. Suppeneeko vai hajaantuuko (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1+\frac{1}{k}}{2})^k$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{k+1}{2k})^k$.

Ratkaisu. (a) Juuritestillä:

Tutkittavan sarjan termit ovat selkeästi positiivisia kaikilla k. Huomataan, että kun $k \geq 2$, niin

$$\sqrt[k]{\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k} = \frac{1+\frac{1}{k}}{2} \leq \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Siispä valitsemalla $k_0 = 2$ ja $q = 3/4$, juuritestin nojalla sarja suppenee.

Majoranttiperiaatteella:

Huomataan, että kun $k \geq 2$, niin

$$\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Koska jälkimmäinen on geometrinen jono, jonka suhdeluku on alle 1, niin sen summa suppenee. Kaikilla k:n arvoilla sarjan $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k$ termit ovat positiivisia, joten majoranttiperiaatteen nojalla summa suppenee ja koska mikään äärellinen alkupätkä sarjan termeistä ei tietenkään vaikuta suppenemiseen, joten myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k$ suppenee. Täsmällisemmin: koska raja-arvot $\lim_{n\to\infty} 1$ ja $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k$ ovat olemassa, niin myös raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k$$

on olemassa, joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k$ suppenee.

(b) Sarja on sama kuin (a) -kohdassa, joten sarja suppenee.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^7+6k^4-5}{k^9+5k^3-3}$.

Ratkaisu. Vertailutestillä:

Sarjan termit ovat positiivisia, kuten myös sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, ja lisäksi

$$\frac{k^7+6k^4-5}{k^9+5k^3-3} : \frac{1}{k^2} = \frac{k^9+6k^6-5k^2}{k^9+5k^3-3} \to 1,$$

kun $k \to \infty$. Koska $0 < 1 < \infty$, ja yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, niin vertailutestin nojalla myös alkuperäinen sarja suppenee.

Majoranttiperiaatteella:

Arvioimalla sarjan termejä nähdään, että

$$\frac{k^7+6k^4-5}{k^9+5k^3-3} \leq \frac{k^7+6k^7}{k^9} = \frac{7}{k^2}.$$

Koska yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (jopa vakiolla 7 kerrottuna) suppenee, ja alkuperäinen sarja on positiivinen, niin majoranttiperiaatteen nojalla myös alkuperäinen sarja suppenee.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

Ratkaisu. Suhdetestillä: Koska sarjan termit ovat positiivisia, ja

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} : \frac{k!}{k^k} &= \frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} \\
&= \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k \to \frac{1}{e} < 1,
\end{aligned}$$

kun $k \to \infty$, niin suhdetestin raja-arvomuodon nojalla sarja suppenee.

Majoranttiperiaatteella: Kun $k > 2$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{k!}{k^k} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k}{\underbrace{k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ kpl}}} \\
&\leq \frac{1 \cdot 2 \cdot \overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{k-2 \text{ kpl}}}{k \cdot k \cdot \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{k-2 \text{ kpl}}} \\
&= \frac{1 \cdot 2}{k \cdot k} = \frac{2}{k^2}.
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\frac{1!}{1^1} = 1 \leq \frac{2}{1^2}$$

ja

$$\frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{2^2},$$

joten arvio $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{2}{k^2}$ pätee kaikilla k.

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ yliharmonisena sarjana suppenee, ja alkuperäisen sarjan termit ovat selvästi epänegatiivisia, niin majoranttiperiaatteen nojalla myös alkuperäinen sarja suppenee.

4. Suppeneeko vai hajaantuuko $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

Ratkaisu. Käytetään suhdetestiä. Merkitään $x_k = \frac{k^2}{2^k}$. Sarjan termit ovat selvästi positiivisia. Nyt

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1}}{x_k} &= \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{k} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10},
\end{aligned}$$

kunhan $k \geq 5$. Näinpä valitsemalla $k_0 = 5$ ja $q = 9/10 < 1$, nähdään että suhdetestin nojalla sarja suppenee. (Suppenemisen voisi huomata myös muodosta $\frac{1}{2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}$ suhdetestin raja-arvomuodon nojalla.)

5. Suppeneeko vai hajaantuuko $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Ratkaisu. Koska sarjan termit ovat itseisarvoltaan väheneviä, ja $\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$, kun $k \to \infty$, niin Leibnizin lauseen nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

suppenee.

6. Oletetaan, että $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 1$.
(a) Oletetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f$$

suppenee. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f$$

suppenee.

(b) Oletetaan, että $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 1$. Oletetaan lisäksi, että integraali $\int_1^\infty f$ suppenee.

(i) Päteekö välttämättä $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$?

(ii) Onko funktio f välttämättä rajoitettu?

Kannattaa tarkastella esimerkiksi funktiota $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, jolle kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ pätee $f(x) = k - 2k^4 |x - (k + \frac{1}{2})|$ kun $k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^3} \leq x \leq k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^3}$, ja $f(x) = 0$ muuten. (Hahmottele kuvaajaa!)

Ratkaisu. (a) Olkoon $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla $g(x) = \int_1^x f$. Funktion f jatkuvuuden nojalla g on määritelty kaikilla $x \geq 1$. Väite, jota yritämme osoittaa on nyt siis yhtäpitävä sen kanssa, että on olemassa $\lim_{x \to \infty} g(x)$. Koska funktio f on epänegatiivinen, niin g on kasvava. Kun $x \to \infty$, on kaksi mahdollisuutta: joko $g(x)$ kasvaa rajatta, tai $g(x) \to C$ jollain $C \geq 0$. Mikäli $g(x)$ kasvaa rajatta, niin selvästi myös kaavalla

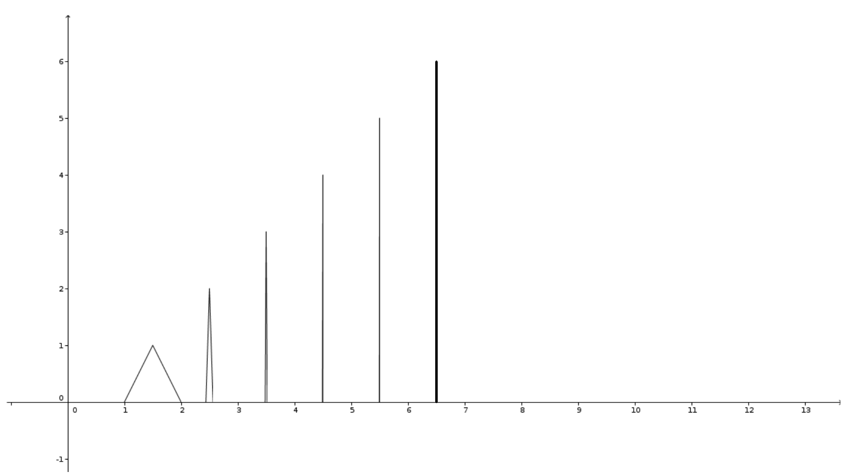
$$x_n = g(n)$$

määritelty lukujono kasvaa rajatta. Koska kuitenkin

$$x_n = g(n) = \int_1^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f,$$

joka oletuksen mukaan suppenee. Siispä $g(x)$ ei voi kasvaa rajatta, vaan se suppenee.

(b) Ei välttämättä kumpaakaan, kuten esimerkkinä annettu funktio osoittaa.



Määritelty funktio on selvästi epänegatiivinen ja jatkuva. Pisteessä $n + 1/2$ funktio saa aina arvon n:

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) = n - 2n^4 \left| n + \frac{1}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right| = n - 2n^4 \cdot 0 = n,$$

joten 0 ei voi olla sen raja-arvo, eikä funktio myöskään ole rajoitettu.

Kuitenkin funktion integraali suppenee, sillä välillä $[k, k+1]$, $k = 1, 2, \ldots$, integraali on

$$
\begin{aligned}
\int_k^{k+1} f &= \int_k^{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^3}} f + \int_{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^3}}^{k+\frac{1}{2}} f + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k^3}} f + \int_{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k^3}}^{k+1} f \\
&= 0 + \int_{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^3}}^{k+\frac{1}{2}} f + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k^3}} f + 0 \\
&= \int_{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^3}}^{k+\frac{1}{2}} k + 2k^4 \left(x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) dx + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k^3}} k - 2k^4 \left(x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) dx \\
&= \overset{k+\frac{1}{2}}{\underset{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^3}}{\Big/}} kx + k^4x^2 - 2k^4 \left(k + \frac{1}{2}\right) x + \overset{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k^3}}{\underset{k+\frac{1}{2}}{\Big/}} kx - k^4x^2 + 2k^4 \left(k + \frac{1}{2}\right) x \\
&= \left(k\left(k + \frac{1}{2}\right) + k^4\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - 2k^4\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&- \left(k\left(k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^3}\right) + k^4\left(k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^3}\right)^2 - 2k^4\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^3}\right)\right) \\
&+ \left(k\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^3}\right) - k^4\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^3}\right)^2 + 2k^4\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^3}\right)\right) \\
&- \left(k\left(k + \frac{1}{2}\right) - k^4\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + 2k^4\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2k^2}.
\end{aligned}
$$

Tämän voi myös huomata siitä, että välillä $[k, k+1]$ funktion kuvaaja muodostaa kolmion, jonka kannan pituus on $\frac{1}{2k^3}$ ja korkeus k. Koska sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$$

yliharmonisena sarjana suppenee, niin (a) -kohdan nojalla suppenee myös

$$\int_1^{\infty} f.$$