Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi II
Kevät 2010
Harjoitus 3
Ratkaisuehdotus (Johanna Rämö)

1. Laske
$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Syksyn monisteen viimeistä sivua kannattaa vilkaista.

Ratkaisu: Syksyn monisteen sivun 92 perusteella tiedämme, että
$$D(\overline{\text{arc}}\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Tästä seuraa, että
$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big/_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \overline{\text{arc}}\sin x$$
$$= \overline{\text{arc}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} - \overline{\text{arc}}\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

2. Derivoi
$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt.$$

Ratkaisu: Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{t^2}$ on jatkuva, joten se on Lauseen 3.6 nojalla integroituva millä tahansa suljetulla välillä. Siten on olemassa integraalifunktio
$$g(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt,$$
jonka derivaatta on lauseen 4.18 perusteella $g'(x) = e^{x^2}$. Nyt $f(x) = g(x^2)$, ja yhdistetyn funktion derivointisäännöllä saadaan
$$f'(x) = g'(x^2)\cdot 2x = 2xe^{x^4}.$$

3. Osoita, että $e^{x^2} \geq 1 + x^2$ kun $0 \leq x \leq 1$ ja tämän tuloksen avulla, että

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \frac{4}{3}.$$

Ratkaisu: Määritellään

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = e^{x^2} - (1 + x^2) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

ja osoitetaan, että funktion arvot ovat epänegatiivisia välillä $[0, 1]$.

Kun $x \in [0, 1]$, niin

$$h'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1) \geq 0.$$

Lisäksi $h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Jos $x \in [0, 1]$, niin väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi_x \in [0, 1]$, jolle pätee

$$h'(\xi_x) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{h(x)}{x}.$$

Nyt $h(x) = xh'(\xi_x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Tästä voidaan päätellä, että $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, kun $x \in [0, 1]$.

Ryhdytään sitten arvioimaan integraalia. Lauseen 4.2 perusteella

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx \geq \int_0^1 1 + x^2\, dx = \Big/_{\!0}^{1} x + \frac{1}{3}x^3$$
$$= 1 + \frac{1}{3} - (0 + 0) = \frac{4}{3}.$$

Siten väite on todistettu.

4. Laske

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx$$

etsimällä luvut A ja B, joille kaikilla $x > 0$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Ratkaisu: Lavennetaan yhtälön oikean puolen termit samannimiksiksi, jolloin saadaan

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}.$$

Tämän rationaalilausekkeen on oltava sama kuin

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

joten niiden osoittajien on oltava samat. Osoittajissa olevat polynomifunktiot ovat samat täsmälleen silloin, kun niiden termien kertoimet ovat samat. Täytyy siis päteä $A+B=0$ ja $2A+B=1$. Yhtälöryhmän ratkaisu on $A=1$ ja $B=-1$.

Nyt kysytty integraali on helppo laskea:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx \\
&= \Big/_{0}^{1} \ln|x+1| - \Big/_{0}^{1} \ln|x+2| \\
&= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 \\
&= \ln(2^2) - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

5. Laske

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$$

etsimällä luvut A, B ja C, joille kaikilla $x>0$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+2} + \frac{C}{x^2+2}.$$

Ratkaisu: Lavennetaan yhtälön oikean puolen termit samannimiksiksi, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+2} + \frac{C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2+2)} \\
&= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+2A+C}{(x+1)(x^2+2)}.
\end{aligned}$$

Tämän rationaalilausekkeen on oltava sama kuin

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2)},$$

joten täytyy päteä $A+B=0$, $B+C=0$ ja $2A+C=1$. Yhtälöryhmän ratkaisu on $A=1/3$, $B=-1/3$ ja $C=1/3$.

Nyt kysytty integraali saadaan muotoon

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2}\,dx.$$

Lasketaan sen summattavat yksitellen. Huomataan, että

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big/_{\!0}^{1} \ln|x+1| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

ja

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_{\!0}^{1} \ln|x^2+2|$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2).$$

Viimeinen summattava on kaikkein vaikein integroitava. Laskemisessa voidan käyttää apuna syksyn monisteen sivua 92 ja tunnistaa yhdistetyn funktion derivaatta. Huomataan, että

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2(\frac{1}{2}x^2+1)}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big/_{\!0}^{1} \overline{\mathrm{arc}}\tan\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{\mathrm{arc}}\tan\frac{1}{\sqrt{2}} - \overline{\mathrm{arc}}\tan 0\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{arc}}\tan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siten saadaan

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\text{arc}}\tan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{6}\ln 3 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\overline{\text{arc}}\tan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. Määritellään $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = \cos\frac{1}{x}$$

kun $x \neq 0$. Osoita Riemannin ehdon avulla, että f on integroituva välillä $[0, 1]$.

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. On osoitettava, että välille $[0, 1]$ voidaan löytää sellainen jako, että ylä- ja alasumman erotus on pienempi kuin ε.

Tutkitaan erikseen välejä $A = [0, \varepsilon/4]$ ja $B = [\varepsilon/4, 1]$. Ensimmäisellä välillä ylä- ja alasumman erotus on pieni, kun välin pituus on pieni. Toisella välillä funktio on integroituva ja voidaan käyttää Riemannin ehtoa. (Myöhemmin käy ilmi, miksi ensimmäisen välin päätepisteeksi valitaan juuri $\varepsilon/4$.)

Aloitetaan välistä A. Tarkastellaan sen jakoa $D_A = \{0, \varepsilon/4\}$, jossa on siis vain yksi jakoväli A. Huomataan, että

$$\sup\{f(x) \mid x \in A\} = 1 \quad \text{ja} \quad \inf\{f(x) \mid x \in A\} = -1.$$

Siten $S_{D_A} - s_{D_A} = 1 \cdot \varepsilon/4 - (-1)\varepsilon/4 = \varepsilon/2$.

Välillä B funktio f on jatkuva, joten se on rajoitettu ja integroituva. Riemannin ehdon perusteella on olemassa sellainen välin B jako D_B, jolle pätee $S_{D_B} - s_{D_B} < \varepsilon/2$.

Valitaan nyt koko välin jako $D = D_A \cup D_B$. Tällöin ylä- ja alasumman erotukseksi saadaan

$$S_D - s_D = S_{D_A} + S_{D_B} - (s_{D_A} + s_{D_B})$$
$$= S_{D_A} - s_{D_A} + S_{D_B} - s_{D_B} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Riemannin ehdon nojalla funktio f on integroituva.