MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 2
Ratkaisuehdotuksia, Kaarlo Reipas
31 . 1. 2011 alkavalle viikolle

1. Selvitä Riemann-integraalin määritemän perusteella (ts. osoita integroituvuus ja määritä integraalin arvo)

$$\int_0^1 7x\,dx.$$

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = 7x$. Käytetään *Riemannin ehtoa (2.7.)*, joilloin riittää löytää kutakin $\epsilon > 0$ kohti jako D_ϵ, jolla $S_D - s_D < \epsilon$. Koska f on aidosti kasvava, pätee

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$$

ja

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$$

millä tahansa rajoitetulla välillä Δ.

Tutkitaan muotoa $D_n = \bigcup_{k=0}^{n} \{k/n\} = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ olevia välejä. Ylläolevan huomion perusteella $G_k = k/n$ ja $g_k = (k-1)/n$. Siispä

$$\begin{aligned} S_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} G_k l\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{7k}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{7k}{n}\frac{1}{n} = \frac{7}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{7}{n^2}\frac{(n+1)n}{2} = \frac{7(n+1)}{2n} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} s_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} g_k l\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{7(k-1)}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{7(k-1)}{n}\frac{1}{n} = \frac{7}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{7}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{7(n-1)}{2n}. \end{aligned}$$

Tutkimalla näiden erotusta saadaan

$$S_{D_n} - s_{D_n} = \frac{7(n+1)}{2n} - \frac{7(n-1)}{2n} = \frac{7}{n}.$$

Olkoon nyt $\epsilon > 0$ annettu. Valitsemalla $D = D_n$, missä $n > 7\epsilon$, nähdään, että

$$S_D - s_D = \frac{7}{n} < \epsilon.$$

Täten funktio f on integroituva välillä $[0, 1]$, joten sillä on olemassa integraali I. Koska jokaisella jaolla D pätee

$$s_D \leq I \leq S_D$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} s_{D_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7(n-1)}{2n} = \frac{7}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{7(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{D_n},$$

niin on oltava

$$I = \frac{7}{2}.$$

2. Laske

$$\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx.$$

Vihje: soveltamalla osittaisintegrointia kahdesti voit saada yhtälön, josta ratkaisemalla saat selville kysytyn integraalin.

Ratkaisu. Osittaisintegrointia soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx &= \Big/_{0}^{\pi/3} e^x \sin x - \int_0^{\pi/3} e^x \cos x \, dx \\
&= \Big/_{0}^{\pi/3} e^x \sin x - \left(\Big/_{0}^{\pi/3} e^x \cos x - \int_0^{\pi/3} -e^x \sin x \, dx \right) \\
&= \Big/_{0}^{\pi/3} e^x \sin x - \Big/_{0}^{\pi/3} e^x \cos x - \int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx
\end{aligned}$$

ja tästä lisäämällä molemmille puolille $\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx$

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx &= \Big/_{0}^{\pi/3} e^x \sin x - \Big/_{0}^{\pi/3} e^x \cos x \\
&= \left(e^{\pi/3} \sin \pi/3 - e^0 \sin 0\right) - \left(e^{\pi/3} \cos \pi/3 - e^0 \cos 0\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\pi/3} - \frac{1}{2} e^{\pi/3} + 1 \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{\pi/3} + 1
\end{aligned}$$

joten

$$\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx = \frac{(\sqrt{3}-1)e^{\pi/3} + 2}{4}.$$

3. Laske

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

sijoituksella $x = \sinh t$. (Tutki syksyn monisteen sivua 83.)

Ratkaisu. Merkitään $\phi(t) = \sinh t$, $\alpha = 0$, $\beta = \ln(1+\sqrt{2})$. Nyt $\phi'(t) = \cosh t$, $\phi(\alpha) = 0$ ja $\phi(\beta) = 1$. Lisäksi ϕ' on jatkuva ja ϕ monotoninen, kun $t > 0$, joten $\phi(t) \in [0,1]$, kun $t \in [\alpha, \beta]$. Nyt voimme käyttää sijoitusmenetelmää Riemannin integraaleille (6.3.) ja saamme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+(\phi(t))^2}\phi'(t)\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+(\sinh t)^2}\cosh t\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \cosh^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}\,dt \\
&= \Big/_{0}^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}}{4} \\
&= \frac{\frac{1}{2}e^{2\ln(1+\sqrt{2})}+2\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}e^{-2\ln(1+\sqrt{2})}}{4} - \frac{\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}+2\cdot 0-\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0}}{4} \\
&= \frac{\frac{1}{2}e^{2\ln(1+\sqrt{2})}+2\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}e^{-2\ln(1+\sqrt{2})}}{4} \\
&= \frac{1}{8}(1+\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8}(1+\sqrt{2})^{-2}.
\end{aligned}$$

4. Selvitä Riemann-inegraalin määritelmän perusteella

$$\int_0^1 e^x\,dx.$$

Vihjeitä: Käytä tasavälistä jakoa. Sovella geometrisen jonon summakaavaa. Huomaa, että

$$\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \to -1$$

kun $n \to \infty$ (koska kyseessä erotusosamäärän vastaluku).

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = e^x$ ja D_n kuten tehtävässä 1. f on kasvava, joten

$$G_k = e^{k/n} \text{ ja } g_k = e^{(k-1)/n}.$$

Siispä

$$\begin{aligned} S_{D_n} - s_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} G_k \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} g_k \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{k/n} - \sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)/n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(e^{1/n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}} - \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} (e-1) \to 0, \text{ kun } n \to \infty. \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että integraali on olemassa. Olkoon se I. Kuten tehtävässä 1,

$$s_D \leq I \leq S_D$$

jokaisella jaolla D, joten koska annettujen vihdeijen nojalla

$$S_{D_n} = \frac{1}{n} \left(e^{1/n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \right) = (1-e) e^{1/n} \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{1/n}} \to e-1$$

ja

$$s_{D_n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1-e}{1-e^{1/n}} \right) = (1-e) \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{1/n}} \to e-1,$$

on annetun integraalin I oltava $e-1$.

5. Tutkitaan funktiota $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = e^{x^2}$. Anna esimerkki jaosta D, jolla $S_D - s_D < 10^{-100}$. Vihje: tarkastele tasavälistä jakoja. Kannattaa muistella luentoja tai katsoa monisteen esimerkkiä 2.8. (Tehtävässä on siis kyse tutkittavan funktion kasvavuudesta ja arvoista välin päätepisteissä.)

Ratkaisu. Olkoon D_n kuten edellisissä tehtävissä. Koska funktio $x \mapsto e^{x^2}$ on kasvava tutkittavalla välillä, esimerkin 2.8. nojalla

$$S_{D_n} - s_{D_n} \leq |D_n| \left(f(1) - f(0) \right) = \frac{1}{n} (e-1).$$

Koska

$$\frac{1}{n} (e-1) < 10^{-100} \iff n > 10^{100}(e-1),$$

esimerkiksi valitsemalla $n = 10^{101}$ jako D_n käy.

6. Tarkastellaan funktiota $f : [0,100] \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = e^{\cos x}$. Anna esimerkki jaosta D, jolla $S_D - s_D < 10^{-10000}$. Voit esimerkiksi käyttää väliarvolausetta ja tietoa, että tutkittavan funktion derivaatta on rajoitettu.

Ratkaisu. $f'(x) = -e^{\cos x} \sin x$, joten $|f'(x)| \leq e^{\cos x} \leq e$. Olkoon $[a,b]$ mikä tahansa väli, $G = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, ja $g = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. Koska $[a,b]$ on suljettu väli, saavutetaan sekä G, että g jossain välin pisteissä x_G ja x_g. Jos $x_G > a$, niin derivoituvuudesta seuraa, että väliarvolauseen nojalla väliltä $]a, x_G[$ löytyy jokin piste ξ, jossa $f'(\xi) = \frac{f(x_G)-f(a)}{x_G-a}$.

Täten

$$\left|\frac{f(x_G)-f(a)}{x_G-a}\right| \leq e \iff |f(x_G)-f(a)| \leq e(x_G-a)$$

joten

$$|f(x_G)-f(a)| \leq e(b-a).$$

Sama pätee, jos $x_G = a$. Lisäksi samanlaisella päättelyllä voidaan todeta, että

$$|f(x_g)-f(a)| \leq e(x_g-a) \leq e(b-a)$$

ja nyt kolmioepäyhtälön nojalla $|G-g| = |f(x_G)-f(x_g)| \leq 2e(b-a)$.

Olkoon D_n välin $[0,100]$ tasavälinen jako n osaan. Nyt

$$\begin{aligned}
S_{D_n} - s_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} G_k \frac{100}{n} - \sum_{k=1}^{n} g_k \frac{100}{n} = \frac{100}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} G_k - g_k\right) \\
&\leq \frac{100}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 2e\frac{100}{n}\right) \\
&= 2e\frac{10000}{n^2}(n) = \frac{20000e}{n}
\end{aligned}$$

ja

$$\frac{20000e}{n} < 10^{-10000} \iff 2 \cdot 10^{10004} e < n.$$

Valitsemalla esimerkiksi $n = 10^{10005}$ jako D_n käy.