Analyyysi II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 8
Ratkaisuehdotus
Johanna Rämö

1. Tarkastellaan funktioita $f_n\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin funktiojonon pisteittäistä suppenemista. Olkoon $x \in [0,1]$. Huomataan, että

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Funktiojono suppenee siis pisteittäin kohti vakiofunktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että suppeneminen on tasaista. Olkoon $x \in [0,1]$. Tällöin

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{n} - 0\right| = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Erotukselle $|f_n(x) - f(x)|$ löydettiin siis muuttujasta x riippumaton yläraja, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan vain n on riittävän suuri. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$. Kun $n > n_\varepsilon$, kaikilla $x \in [0,1]$ pätee

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Suppeneminen on siis tasaista.

2. Tarkastellaan funktioita $f_n\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

Ratkaisu: Jotta funktiojono (f_n) suppenisi pisteittäin, täytyy raja-arvon $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ olla olemassa kaikilla $x \in [1,2]$. Osoitetaan, että tämä ei päde pisteessä $x = 2$. Kun $n \geq 4$, tiedetään, että $2^n \geq n^2$. (Tämä on helppo todeta esimerkiksi induktiolla.) Nyt

$$f_n(2) = \frac{2^n}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n,$$

kun $n \geq 2$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} f_n(2) = \infty$. Siten funktiojono ei suppene pisteittäin.

Koska funktiojono ei suppene pisteittäin, ei se suppene myöskään tasaisesti.

3. Tarkastellaan funktioita $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdoilla

$$f_n(x) = 4n^2 x(\frac{1}{n} - x)$$

kun $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ ja $f_n(x) = 0$ muuten. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti? Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx?$$

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin pisteittäistä suppenemista. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$. Olkoon $x \in \,]0,1]$ ja $n_{\varepsilon,x} > 1/x$. Kun $n > n_{\varepsilon,x}$, pätee $1/n < x$ ja siksi

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Lisäksi $f_n(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in [0,1].$$

Funktiojono suppenee siis pisteittäin kohti vakiofunktiota $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Osoitetaan sitten, että suppeneminen ei ole tasaista. Olkoon $\varepsilon = 1$. Jotta funktiojono suppenisi tasaisesti, pitäisi löytyä sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kaikilla $x \in [0,1]$ pätee $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| < 1$, kun $n > n_\varepsilon$. Huomataan kuitenkin, että

$$\left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = \left| 4n^2 \cdot \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) \right| = \left| 4n^2 \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \right| = 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten haluttua lukua n_ε ei löydy, eikä suppeneminen ole tasaista.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Koska $f_n(x) = 0$ kaikilla $x \in]1/n, 1]$, saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{1/n} 4n^2x\left(\frac{1}{n} - x\right)\,dx = \int_0^{1/n} (4nx - 4n^2x^2)\,dx \\ &= \Big/_{0}^{1/n} \left(2nx^2 - \frac{4n^2}{3}x^3\right) = \frac{2}{n} - \frac{4}{3n} - (0-0) = \frac{2}{3n}.\end{aligned}$$

Huomataan, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3n} = 0.$$

Määrättyjen integraalien muodostaman lukujonon suppeneminen ei siis tarkoita, että funktiojono suppenisi tasaisesti.

4. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x+\frac{1}{n}x^2}\,dx.$$

Käytä tasaista suppenenmista (tarkista se!)

Ratkaisu: Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{x+\frac{1}{n}x^2}$$

ja osoitetaan, että jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Olkoon $x \in [0,1]$. Exponenttifunktio on kasvava ja saa vain positiivisia arvoja, joten

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left|e^{x+\frac{1}{n}x^2} - e^x\right| = e^x|e^{\frac{1}{n}x^2} - 1| \\ &= e^x(e^{\frac{1}{n}x^2} - 1) \le e^1(e^{\frac{1}{n}\cdot 1^2} - 1) \\ &= e(e^{\frac{1}{n}} - 1).\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että $x \in [0,1]$. Eksponenttifunktio on jatkuva, joten on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}} - e^0 < \frac{\varepsilon}{e},$$

kun $n > n_\varepsilon$. Nyt tiedetään, että

$$|f_n(x) - f(x)| \le e(e^{\frac{1}{n}} - 1) < \frac{e\varepsilon}{e} = \varepsilon$$

kaikilla $x \in [0,1]$, kun $n > n_\varepsilon$. Siten jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f.

Funktiot f_n ovat jatkuvia ja funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f, joten rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen voi vaihtaa (lause IV.2.2, sivu 79). Siten saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \Big/_0^1 e^x = e - 1.$$

5. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + \frac{1}{n})^{nx}\,dx.$$

Käytä tasaista suppenenmista (tarkista se!) Muista myös luvun e määritelmä. Tasaisen suppenemisen todistuksessa voi soveltaa väliarvolausetta funktioon $f(t) = t^x = e^{x \ln t}$ (kiinteällä x.)

Ratkaisu: Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio

$$g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

ja osoitetaan, että funktiojono (g_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$.

Olkoon $x \in [0,1]$. Tiedetään, että

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Käytetään apuna potenssifunktiota $f_x \colon \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f_x(t) = t^x$, joka on jatkuva. (Tässä siis eksponentti $x \in [0,1]$ on kiinteä.) Nyt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x \\ &= \lim_{n\to\infty} f_x\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = f_x(e) = e^x.\end{aligned}$$

Tämä pätee jokaisella $x \in [0,1]$. Funktiojono (g_n) suppenee siis pisteittäin kohti funktiota $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$.

Osoitetaan sitten, että suppeneminen on tasaista. Potenssifunktio f_x on derivoituva ja $f_x'(t) = xt^{x-1}$ kaikilla $t \in \,]0,\infty[$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa piste $\xi \in \left]\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, e\right[$, jolle pätee

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|f_x\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) - f_x(e)\right| \overset{\text{DVAL}}{=} |f_x'(\xi)| \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right|.$$

Koska $x \in [0,1]$ ja $\xi > 1$, saadaan

$$|f_x'(\xi)| = x\xi^{x-1} \leq 1 \cdot \xi^{1-1} = 1.$$

Siten

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right|.$$

Erotukselle $|g_n(x) - g(x)|$ on nyt löydetty muuttujasta x riippumaton yläraja, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi lukua n kasvattamalla. Osoitetaan tämä vielä täsmällisesti.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. Siten kaikilla $x \in [0,1]$ pätee

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$, ja funktiojono (g_n) suppenee tasaisesti.

Funktiot g_n ovat jatkuvia ja funktiojono (g_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota g, joten rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen voi vaihtaa (lause IV.2.2, sivu 79). Siten saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \Big/_{\!0}^{1} e^x = e - e^0 = e - 1.$$

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja määritellään funkiot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) + f(x - \frac{1}{n})}{2}.$$

(a) Oletetaan, että f on jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee pisteittäin.

(b) Oletetaan, että f on tasaisesti jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti

Ratkaisu: a) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva pisteessä x ja

$$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)=x,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x-\frac{1}{n}\right)=f(x).$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})+f(x-\frac{1}{n})}{2} &= \frac{\lim_{n\to\infty} f(x+\frac{1}{n})+\lim_{n\to\infty} f(x-\frac{1}{n})}{2}\\ &= \frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x).\end{aligned}$$

Tämä pätee jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Siten funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota f.

b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Funktio f on tasaisesti jatkuva, joten on olemassa luku $\delta_\varepsilon > 0$, jolla pätee

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$ ja $|x-y|<\delta_\varepsilon$.

Valitaan $n_\varepsilon > 1/\delta_\varepsilon$ ja oletetaan, että $n > n_\varepsilon$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\left|x-\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{n_\varepsilon}<\delta_\varepsilon$$

ja

$$\left|x-\left(x-\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{n_\varepsilon}<\delta_\varepsilon,$$

joten

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x+\frac{1}{n})+f(x-\frac{1}{n})}{2}-f(x)\right|\\ &= \left|\frac{f(x+\frac{1}{n})+f(x-\frac{1}{n})}{2}-\frac{2f(x)}{2}\right|\\ &= \left|\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)+f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{2}\right|\\ &\le \frac{|f(x+\frac{1}{n})-f(x)|+|f(x-\frac{1}{n})-f(x)|}{2}\\ &< \frac{\varepsilon+\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Siten tiedetään, että

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, kun $n > n_\varepsilon$. Jono (f_n) suppenee siis tasaisesti.