MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 5
21 . 2. 2011 alkavalle viikolle
Esimerkkiratkaisuja, Jani Hannula

1. Suppeneeko

$$\int_0^1 (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x})\, dx?$$

Ratkaisu. Integraali on epäoleellinen sekä ala- että ylärajan suhteen. Integroitava funktio on kuitenkin Riemann-integroituva millä tahansa välin $]0,1[$ suljetulla osavälillä. Näin ollen määritelmän II.1.9. perusteella

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x}\right) dx$$

suppenee, jos ja vain jos[1]

$$\int_0^d \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x}\right) dx$$

suppenee ja

$$\int_d^1 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x}\right) dx$$

suppenee. Kuten monisteessa on osoitettu, apupisteeksi d voidaan valita mikä tahansa välin $]0,1[$ piste. Valitaan $d = 1/2$. Olkoon $1/2 < b < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_d^b \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x}\right) dx &= \int_{1/2}^b \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x}\right) dx = \int_{1/2}^b \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx + \int_{1/2}^b \frac{3}{1-x}\, dx \\
&= \Big/_{1/2}^{b} 4\sqrt{x} + \Big/_{1/2}^{b} -3\ln|1-x| \\
&= 4\sqrt{b} - \frac{4}{\sqrt{2}} - 3\ln|1-b| + 3\ln(1/2).
\end{aligned}$$

Tiedetään, että $\ln x \to -\infty$, kun $x \to 0+$. Tällöin $-3\ln|1-b| \to \infty$, kun $b \to 1-$, joten

$$4\sqrt{b} - \frac{4}{\sqrt{2}} - 3\ln|1-b| + 3\ln(1/2) \to \infty,$$

[1] Monisteen määritelmässä, kuten usein *määritelmissä*, sana ”jos” esiintyy merkityksessä ”jos ja vain jos”.

kun $b \to 1$ eli tehtävän integraali hajaantuu.

2. Millä $s > 0$ suppenee
$$\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^s}\,dx?$$

Ratkaisu. Ensinnäkin huomataan, että $e^{\sin x}/x^s > 0$, kun $x > 0$. Kuten tehtävässä 1, integraali on epäoleellinen sekä ala- että ylärajan suhteen. Tiedetään, että $\sin x \in [-1, 1]$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen $e^{-1} \le e^{\sin x} \le e$, joten

$$\frac{e^{-1}}{x^s} \le \frac{e^{\sin x}}{x^s} \le \frac{e}{x^s}.$$

Olkoon $0 < a < b$. Tällöin

$$\int_a^b \frac{e^{\sin x}}{x^s}\,dx \ge \int_a^b \frac{e^{-1}}{x^s}\,dx = \frac{1}{e}\int_a^b \frac{1}{x^s}\,dx. \tag{1}$$

Tehtävän 1 tapaan voimme valita apupisteeksi d minkä tahansa välin $]0, \infty[$ pisteen. Valitaan $d = 1$. Tällöin minorantti

$$\frac{1}{e}\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos

$$I_1 := \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx \quad \text{ja} \quad I_2 := \frac{1}{e}\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenevat. Luennoilla (ja monisteen esimerkeissä II.1.2. ja II.1.8.) on käyty läpi, että

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos $s < 1$ ja, että

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos $s > 1$. Tämän perusteella I_2 suppenee, vain kun $s > 1$. Tässä tapauksessa kuitenkin I_1 hajaantuu. Siispä yhtälössä (1) löydetty minorantti hajaantuu kaikilla $s > 0$, joten tehtävän epäoleellinen integraali ei suppene millään $s > 0$.

3. Suppeneeko

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx?$$

Vihje: itseinen suppeneminen...

Ratkaisu. Monisteen lauseen II.3.2. mukaan epäoleellinen integraali suppenee, jos se suppenee itseisesti[2]. Olkoon $0 < b < 1$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\int_0^b \left|\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\right| dx &= \int_0^b \frac{|\cos x|}{\sqrt{1-x}}\,dx \leq \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \\
&= -2 \Big/_{0}^{b} \sqrt{1-x} = -2(\sqrt{1-b}-1) \\
&= (2-2\sqrt{1-b}) \to 2,\ \text{kun } b \to 1.
\end{aligned}$$

Majoranttiperiaatteen nojalla tutkittava integraali suppenee itseisesti ja täten myös "ei-itseisesti".

Huom. Itseistä suppenemista ei tässä olisi oikeasti tarvittu, jos olisi huomattu, että $\cos x \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$. Jos integroimisväli olisi ollut jokin muu, olisi itseistä suppenemista voitu tarvita myös "ihan oikeasti". Tämä on kuitenkin hyvä esimerkki tilanteesta, jossa on hyötyä siitä tiedosta, että itseisestä suppenemisesta seuraa suppeneminen.

4. Oletetaan, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 1$ ja että epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty f$$

suppenee. Pätevätkö tällöin seuraavat väitteet

$$(i) \quad \int_a^{2a} f \to 0\,\text{kun}\,a \to \infty;$$

$$(ii) \quad \int_a^{\infty} f \to 0\,\text{kun}\,a \to \infty?$$

Tarkka perustelu!

Ratkaisu.

(i): Olkoon $a > 1$. Oletuksen mukaan $\int_1^\infty f$ suppenee eli on olemassa $\lim_{a\to\infty} \int_1^a f$. Merkitään tätä raja-arvoa $\int_1^\infty f = c$. Tällöin myös $\lim_{a\to\infty} \int_1^{2a} f =$c. Integraali $\int_1^{2a} f$ voidaan kirjoittaa summana

[2] Käänteinen ei päde.

$$\int_1^{2a} f = \int_1^a f + \int_a^{2a} f,$$

mikä on yhtäpitävää väitteen

$$\int_a^{2a} f = \int_1^{2a} f - \int_1^a f.$$

kanssa. Näin ollen $\int_a^{2a} \to (c - c) = 0$, kun $a \to \infty$.

(ii): Olkoon $a > 1$. Lauseen II.1.4. nojalla $\int_a^\infty f$ suppenee, koska oletuksen mukaan $\int_1^\infty f$ suppenee. Merkitään kohdan (i) tapaan $\int_1^\infty f = c$. Edelleen lauseen II.1.4. perusteella pätee

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty f = \int_1^a f + \int_a^\infty f \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^\infty f = \int_1^\infty f - \int_1^a f \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^\infty f = c - \int_1^a f.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\int_a^\infty f \to (c - c) = 0$, kun $a \to \infty$.