MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 2. 5. 2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Esko Heinonen)

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^3+3}?$$

Ratkaisu: Nyt $(k^2+2)/(k^3+3) \geq 0$ kaikilla $k \geq 1$, joten voimme käyttää minoranttiperiaatetta. Arvioidaan siis sarjan termejä alaspäin:
$$\frac{k^2+2}{k^3+3} \geq \frac{k^2}{k^3+3k^3} = \frac{k^2}{4k^3} = \frac{1}{4k}.$$
Tiedetään, että harmoninen sarja $\sum 1/k$ hajaantuu, eikä positiivisella vakiolla kertominen vaikuta hajaantumiseen, joten olemme löytänyt hajaantuvan minorantin ja siten kysytty sarja hajaantuu minoranttiperiaatteen nojalla.

Vaihtoehtoisesti sarjan hajaantuminen voidaan osoittaa vertailutestin avulla: Koska
$$\frac{k^2+2}{k^3+3} : \frac{1}{k} = \frac{k^3+2k}{k^3+3} = \frac{1+\frac{2}{k^2}}{1+\frac{3}{k^3}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} = 1 > 0$$
ja harmoninen sarja $\sum 1/k$ hajaantuu, niin vertailutestin nojalla kysytty sarja hajaantuu.

2. Tarkastellaan funktioita $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty yhtälöillä
$$f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^{2n}+1}.$$
Suppeneeko jono (f_n) pisteittäisesti? Suppeneeko se tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä?

Ratkaisu: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $n > 2x$ on $x < \frac{n}{2}$ ja $x - n < \frac{n}{2} - n = -\frac{n}{2} < 0$, jolloin $(x-n)^{2n} > (-\frac{n}{2})^{2n} > 0$. Näin ollen
$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\left(-\frac{n}{2}\right)^{2n}+1} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Näin ollen jokaista $\varepsilon > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon \quad \forall n > n_{\varepsilon,x}$$

ja täten jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti nollafunktiota $f(x) \equiv 0$.

Funktiojono ei suppene tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä, sillä kun $x = n$, on

$$f_n(n) = \frac{1}{(n-n)^{2n} + 1} = 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = 1$. Näin ollen jokaisella $\varepsilon > 0$ ei siis ole olemassa indeksiä $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, siten, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

aina kun $n > n_\varepsilon$.

3. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-3)^k.$$

Oletetaan, että sarja suppenee, kun $x = 1$ ja hajaantuu, kun $x = 5$. Määritä sarjan suppenemissäde ja suppenemisväli. Tarkka perustelu!

Ratkaisu: Olkoon $R = \sup\{|x-3| : x \in \mathbb{R}, \text{sarja suppenee}\}$ sarjan suppenemissäde. Koska sarja suppenee pisteessä $x = 1$, niin Abelin lauseen nojalla sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joille $|x-3| < |1-3| = 2$. Siis $R \geq 2$. Toisaalta sarja hajaantuu pisteessä $x = 5$, joten Abelin lauseen nojalla se hajaantuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla $|x-3| > |5-3| = 2$, siis $R \leq 2$. Täytyy siis olla $R = 2$.

Suppenemisväli on suppenemissädettä vastaava avoin väli $]x_0 - R, x_0 + R[$, siis tässä tapauksessa avoin väli $]3-2, 3+2[\,=\,]1, 5[$.

4. (a) Muodosta Taylorin polynomi $\mathrm{T}_2(x; \frac{\pi}{3})$ funktiolle f, joka on määritelty ehdolla $f(x) = \sin x$.

(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen ja sopivan Taylorin kehitelmän avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(2\sin x - \sqrt{3}) - (x - \frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})^2}.$$

Ratkaisu: a) Lasketaan ensin funktion f kaksi ensimmäistä derivaattaa:

$$f'(x) = \cos x \text{ ja } f''(x) = -\sin x.$$

Tällöin $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ja $f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ja Taylorin polynomi on

$$T_2(x;\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3})+f'(\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})+\frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2.$$

b) Funktion f 1. ja 2. kertaluokan derivaatat ovat jatkuvia koko reaaliakselilla, joten lauseen VI.2.1. oletukset ovat voimassa ja funktiolla on Taylorin kehitelmä $f(x) = T_2(x;\frac{\pi}{3})+(x-\frac{\pi}{3})^2\varepsilon(x)$, missä $\varepsilon(x) \to 0$, kun $x \to \frac{\pi}{3}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
& \frac{(2\sin x - \sqrt{3}) - (x - \frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})^2} \\
= \;& \frac{(2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2 + (x-\frac{\pi}{3})^2\varepsilon(x)) - \sqrt{3}) - (x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})^2} \\
= \;& \frac{(\sqrt{3} + (x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})^2 + 2(x-\frac{\pi}{3})^2\varepsilon(x) - \sqrt{3}) - (x-\frac{\pi}{3}))}{(x-\frac{\pi}{3})^2} \\
= \;& \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})^2 + 2(x-\frac{\pi}{3})^2\varepsilon(x)}{(x-\frac{\pi}{3})^2} \\
= \;& -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\varepsilon(x) \to -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ kun } x \to \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$