MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 6
14. 3. 2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Esko Heinonen)

Muista, että moodle-alueellamme voi keskustella näidenkin ratkaisemisesta. (Linkki esim. kurssin kotisivulla.)

Suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat? Tarkat perustelut!

(Kannattaa palauttaa mieleen minorantti- ja majoranttiajattelu.)

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}.$$

Ratkaisu: Tarkastellaan sarjan osasummia
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Tiedetään, että harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ hajaantuu (Esim. 1.4. s. 58), joten tämänkin sarjan osasummat kasvavat rajatta, sillä kyseessä on harmonisen sarjan osasumma kerrottuna vakiolla $1/2$. Nyt siis kaikilla $M < \infty$ pätee jostain indeksistä lähtien $\sum_{k=1}^{n} 1/k > 2M$, jolloin $S_n > M$ ja sarja hajaantuu.

Osasummien hajaantuminen voidaan perustella myös esimerkiksi tutkimalla jonon (S_n) osajonoa (S_{2^m}) seuraavasti:
$$\begin{aligned} S_{2^m} &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m})) \\ &> \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \underbrace{(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})}_{4=2^{3-1} \text{ kpl}} + \ldots + \underbrace{(\frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m})}_{2^{m-1} \text{ kpl}}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(m+1) \to \infty, \text{ kun m} \to \infty. \end{aligned}$$
Näin ollen jono (S_n) ei voi supeta, koska sillä on hajaantuva osajono.

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}.$$

Ratkaisu: Koska
$$\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2k} \geq 0 \quad \forall k \geq 1,$$

pätee sarjan osasummille

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Tehtävän 1. perusteella $\sum_{k=1}^{n} 1/2k \to \infty$, kun $n \to \infty$, joten minoranttiperiaatteen (III 2.2. (b), s. 64) nojalla tämäkin sarja hajaantuu.

3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Ratkaisu: Huomataan, että

$$\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2k+k} = \frac{1}{3k} > 0$$

kaikilla $k \geq 1$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/3k$ on harmoninen sarja kerrottuna vakiolla $1/3 > 0$, joten se hajaantuu. Näin ollen kysytty sarja hajaantuu minoranttiperiaatteen nojalla.

Vaihtoehtoisesti voidaan tarkastella osasummia, joille pätee

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2(n+1)-1}}_{=2n+1} -1 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} - 1. \end{aligned}$$

Tehtävän 2. nojalla $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \to \infty$, kun $n \to \infty$, joten myös tässä osasummat kasvavat rajatta.

4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+3k}{2+k^2}.$$

Ratkaisu: Etsitään jälleen sarjalle hajaantuva minorantti arvioimalla sarjan termejä alaspäin. Koska

$$\frac{4+3k}{2+k^2} \geq \frac{3k}{2k^2+k^2} = \frac{3k}{3k^2} = \frac{1}{k} \geq 0$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin sarjan osasummille pätee

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4+3k}{2+k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Kyseessä on jälleen harmonisen sarjan osasumma, joka hajaantuu ja näin ollen minoranttiperiaatteen nojalla kysytty sarja hajaantuu.

5.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+3k}{2+k^3}.$$

Ratkaisu: Arvioidaan sarjan termejä tällä kertaa ylöspäin ja yritetään löytää sarjalle suppeneva majorantti. Kaikilla $k \geq 1$ pätee

$$0 < \frac{4+3k}{2+k^3} \leq \frac{4k+3k}{k^3} = \frac{7k}{k^3} = \frac{7}{k^2}.$$

Nyt kaikilla n sarjan osasummille pätee

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4+3k}{2+k^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{k^2} = 7\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 7\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ on yliharmoninen sarja, joka suppenee, eikä vakiolla kertominen vaikuta suppenemiseen, joten näin ollen kysytty sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ suppeneminen voidaan perustella esimerkiksi integraalitestillä (2.8. s. 67).

Olkoon $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1/x^2$. Nyt f on positiivinen, vähenevä ja integroituva jokaisella välillä $[1,a]$, $a > 1$. Tällöin

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{x^2} = 1,$$

joten integraali suppenee ja näin ollen integraalitestin nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ suppenee.

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}.$$

(Esim. vertaa epäoleelliseen integraaliin.) Lisäkysymys: Entä

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k+1)}.$$

Ratkaisu: Seurataan vihjettä ja verrataan sarjaa epäoleelliseen integraaliin. Funktio $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ on aidosti kasvava, joten tässä tarkasteltava funktio $x \mapsto ((x+1)\ln(x+1))^{-1}$ on aidosti vähenevä, mutta kuitenkin positiivinen ja saa välillä $[k, k+1]$ suurimman arvonsa välin vasemmanpuoleisessa päätepisteessä. Tällöin kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ pätee

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{(k+1)\ln(k+1)} = \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$$

ja sarjan osasummille saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$$

$$= \Big/_{1}^{n+1} \ln(\ln(x+1)) = \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 2).$$

Koska $\ln(\ln(n+2)) \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin integraali hajaantuu ja siten myös kysytty sarja hajaantuu.

Lisäkysymys: entä

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k+1)}.$$

Edellä osoitettiin, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$$

hajaantuu. Koska kaikilla k pätee

$$\frac{1}{k\ln(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} > 0,$$

niin minoranttiperiaatteen nojalla myös lisäkysymyksen sarja hajaantuu. Tämän osoittautuminen olisi kuitenkin ollut vaikeampaa ilman tietoa ensimmäisen sarjan hajaantumisesta, sillä integraalin $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x+1)}$ laskeminen olisi ollut hankalaa.