MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 11, Esimerkkiratkaisuja, 8 sivua
Kaarlo Reipas

Merkintöjä helpottaaksemme, käytämme lyhennystä $f^{(0)} = f$.

1. Laske sivun 104 esimerkin tapaan sellainen likiarvo luvulle e, että virheen itseisarvo on pienempi kuin 10^{-5}.

Ratkaisu. Olkoon $x_0 = 0$. Funktio $f : x \mapsto e^x$ on koko reaalisuoralla jatkuvasti derivoituva äärettömän monta kertaa, joten Taylorin kaavan oletukset ovat voimassa millä tahansa $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Siispä f voidaan esittää muodossa

$$f(x) = T_{n-1}(x; 0) + R_n(x; 0).$$

Lauseen VI.1.2. nojalla virhetermille saadaan arvio

$$R_n(x; 0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - 0)^n,$$

missä ξ on jokin x:n ja nollan välissä oleva luku. Olemme kiinnostuneita luvusta e, eli funktion f arvosta kohdassa 1, ja lisäksi tiedämme, että $f^{(n)} = f$ kaikilla n, joten sijoittamalla $x = 1$, saadaan

$$R_n(1; 0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(1 - 0)^n = \frac{e^\xi}{n!}.$$

Koska $0 < \xi < 1$, funktion f kasvavuuden nojalla voimme arvioida

$$R_n(1; 0) \leq \frac{e}{n!}.$$

Esimerkiksi valinnalla $n = 9$, pätee

$$\frac{e}{n!} < 10^{-5},$$

jolloin

$$|e - T_{9-1}(1; 0)| = R_9(1; 0) < 10^{-5},$$

eli esimerkiksi

$$T_8(1; 0) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + \frac{1^7}{7!} + \frac{1^8}{8!} = \frac{109601}{40320} \approx 2,71827877$$

kelpaa halutuksi likiarvoksi.

2. Laske sivun 110 esimerkin tapaan sellainen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 e^{x^4}\,dx,$$

että virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01.

Ratkaisu. Sijoittamalla $y = x^4$, $x_0 = 0$ funktion $x \mapsto e^x$ Taylorin kaavaan

$$e^y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{x_0}}{k!}(y - x_0)^k + R_n(y; x_0)$$

ja käyttämällä Lagrangen jäännöstermimuotoa saamme

$$e^{x^4} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{4k} + R_n(x^4; 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{4k} + \frac{e^{\xi_x}}{n!} x^{4n} \tag{1}$$

jollain $\xi_x \in \left]0, x^4\right[$. Arvioimalla jäännöstermiä kun $0 < x \leq 1$ saamme

$$0 < \frac{e^{\xi_x}}{n!} x^{4n} \leq \frac{e^{x^4}}{n!} x^{4n} \leq \frac{e}{n!} x^{4n}.$$

Integroimalla yhtälöä 1 saamme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{x^4} dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{4k} dx + \int_0^1 \frac{e^{\xi_x}}{n!} x^{4n} dx \leq \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{4k} dx + \int_0^1 \frac{e}{n!} x^{4n} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \frac{1}{k!} x^{4k} dx + \Big/_{0}^{1} \frac{e}{n!(4n+1)} x^{4n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Big/_{0}^{1} \frac{1}{k!(4k+1)} x^{4k+1} + \frac{e}{n!(4n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!(4k+1)} + \frac{e}{n!(4n+1)}
\end{aligned}$$

ja koska virhetermin integraali $\int_0^1 \frac{e^{\xi_x}}{n!} x^{4n} dx$ on selvästi positiivinen, niin

$$0 < \int_0^1 e^{x^4} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!(4k+1)} \leq \frac{e}{n!(4n+1)}.$$

Valitsemalla $n = 4$, huomaamme, että $\frac{e}{n!(4n+1)} \approx 0{,}00666 < 0{,}01$. Siispä halutuksi likiarvoksi kelpaa esimerkiksi

$$\sum_{k=0}^{4-1} \frac{1}{k!(4k+1)} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{18} + \frac{1}{78} = \frac{742}{585} \approx 1{,}268.$$

3. Muodosta funktiolle $f(x) = \ln x$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_2(x; e)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x \to e} \frac{\frac{x}{e} - \ln x}{(x - e)^2}.$$

Osaatko selvittää myös raja-arvon

$$\lim_{x\to e}\frac{x-\ln x^e}{(x-e)^2}?$$

Ratkaisu. Muodostetaan Taylorin polynomi:

$$\begin{aligned}
T_2(x;e) &= f(e)+\sum_{k=1}^{2}\frac{f^{(k)}(e)}{k!}(x-e)^k\\
&= \ln(e)+(x-e)f'(e)+\frac{1}{2}(x-e)^2f''(e)\\
&= 1+(x-e)\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2.
\end{aligned}$$

Koska $f\in C^2(B(e,1))$, niin lauseen VI.2.1. nojalla

$$f(x)=T_2(x;e)+(x-e)^2\varepsilon(x),\ \text{missä } \varepsilon(x)\to 0,\ \text{kun } x\to e,$$

kunhan $e-1<x<e+1$. Näemme, että

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{e}-\ln x}{(x-e)^2} &= \frac{\frac{x}{e}-(1+(x-e)\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+(x-e)^2\varepsilon(x))}{(x-e)^2}\\
&= \frac{x}{e(x-e)^2}-\frac{1}{(x-e)^2}-\frac{1}{e(x-e)}+\frac{1}{2e^2}-\varepsilon(x)\\
&= \frac{x-e}{e(x-e)^2}-\frac{1}{e(x-e)}+\frac{1}{2e^2}-\varepsilon(x)\\
&= \frac{1}{2e^2}-\varepsilon(x)\to\frac{1}{2e^2},\ \text{kun } x\to e.
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\frac{x-\ln x^e}{(x-e)^2}=\frac{x-e\ln x}{(x-e)^2}=e\frac{\frac{x}{e}-\ln x}{(x-e)^2},$$

joten jälkimmäinen raja-arvo on $\frac{1}{2e}$.

4. Muodosta funktioille $f(x)=e^x$ ja $g(x)=e^{\sin x}$ sopivat Taylorin polynomit ja tutki niiden avulla raja-arvoja

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^n},$$

missä $n=0,1,2,3$ ja 4. (Tässä tulkitaan $x^0=1$.)

Ratkaisu. Sekä f että g ovat kaikkialla äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituvia, joten lauseen VI.2.1. nojalla millä tahansa $n\in\mathbb{N}$:

$$f(x)=T_n^f(x;0)+x^n\varepsilon_1(x)$$

sekä

$$g(x) = T_n^g(x;0) + x^n \varepsilon_2(x),$$

missä $\varepsilon_1(x) \to 0$ ja $\varepsilon_2(x) \to 0$, kun $x \to 0$. Sekä ε_1 että ε_2 voivat riippua luvusta n, eli täsmällisemmin voisimme merkitä $\varepsilon_{(1,n)}$. Oleellista kuitenkin on vain näiden funktioiden raja-arvot kun $x \to 0$. Näin saamme

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^n} &= \frac{T_n^f(x;0) + x^n \varepsilon_1(x) - T_n^g(x;0) - x^n \varepsilon_2(x)}{x^n} \\ &= \frac{1}{x^n}(T_n^f(x;0) - T_n^g(x;0)) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Kuten edellisissä tehtävissä, $T_n^f(x;0) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Lasketaan nyt $T_n^g(x;0)$:

$$\begin{aligned} &g'(x) = e^{\sin x} \cos x \\ &g^{(2)}(x) = e^{\sin x} \cos^2 x - e^{\sin x} \sin x \\ &g^{(3)}(x) = e^{\sin x}(\cos x)\left(-3\sin x + \cos^2 x - 1\right) \\ &g^{(4)}(x) = e^{\sin x}((\sin x)(1 + 3\sin x) + (\cos^4 x) - 2(3(\sin x) + 2)(\cos^2 x)) \end{aligned}$$

Tutkitaan tapaukset $n = 0, 1, 2, 3$ ja 4:

$\boxed{n = 0:}$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{1}{1}(T_0^f(x;0) - T_0^g(x;0)) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\ =\ &\lim_{x\to 0}(\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{0} \frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\ =\ &\lim_{x\to 0}(1 - 1) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{n = 1:}$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(T_1^f(x;0) - T_1^g(x;0)) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\ =\ &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{1} \frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\ =\ &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(1 + \frac{x}{1} - 1 - \frac{x}{1}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{n = 2:}$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(T_2^f(x;0) - T_2^g(x;0)) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\ =\ &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\ =\ &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{n = 3:}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}(T_3^f(x;0) - T_3^g(x;0)) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}(\sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{0x^3}{6}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{6}\right) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$\boxed{n = 4:}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(T_4^f(x;0) - T_4^g(x;0)) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{0x^3}{6} - \frac{-3x^4}{24}) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{4x^4}{24}\right)
\end{aligned}$$

Tätä viimeistä raja-arvoa ei ole olemassa.

5. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_4(x;8)$ ja tutki kuinka hyvän arvion se antaa funktiolle f välillä $[8,10]$? Entä väleillä $[8,14]$ tai $[8,18]$?

Ratkaisu. Derivoidaan alkajaisiksi funktioita muutaman kerran:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{10}{27}x^{\frac{-8}{3}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}x^{\frac{-11}{3}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{880}{243}x^{\frac{-14}{3}}
\end{aligned}$$

Muodostetaan nyt Taylorin polynomi:

$$\begin{aligned}
T_4(x;8) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1}(x-8) + \frac{f^{(2)}(8)}{2}(x-8)^2 + \frac{f^{(3)}(8)}{6}(x-8)^3 + \frac{f^{(4)}(8)}{24}(x-8)^4 \\
&= 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3 - \frac{5}{248832}(x-8)^4 \\
&= -\frac{5}{248832}x^4 + \frac{55}{62208}x^3 - \frac{11}{648}x^2 + \frac{55}{243}x + \frac{220}{243}
\end{aligned}$$

Koska $f \in C^5(B(8,8))$, niin Lagrangen jäännöstermimuotoa käyttäen saadaan

$$|f(x) - T_4(x;8)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-8)^5 \right|$$

jollain $\xi \in]8, x[$, kun $8 < x < 16$.

Mikäli $8 < x \leq 10$, niin $8 < \xi < 10$, joten

$$\left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-8)^5 \right| < \frac{880}{243 \cdot 5!} 8^{\frac{-14}{3}} 2^5 \approx 0{,}0000208055.$$

Jos $8 < x \leq 14$, niin $8 < \xi < 14$, ja täten

$$\left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-8)^5 \right| < \frac{880}{243 \cdot 5!} 8^{\frac{-14}{3}} 6^5 \approx 0{,}0010516081.$$

Välillä $[8, 18]$ lauseen VI.1.1. oletukset eivät periaatteessa ole voimassa millään sellaisella luvun h valinnalla, että 18 kuuluisi joukkoon $B(8, h)$. Lauseen VI.1.1. todistuksessa ei kuitenkaan varsinaisesti tarvittu tietoa siitä, että f on jatkuvasti derivoituva n kertaa *symmetrisellä* välillä, eli $f \in C^n(B(x_0, h))$, vaan todistus toimii myös yleisemmin, kun $f \in C^n(\Delta)$, missä Δ on jokin x_0:n sisältävä väli.

Täten kun $8 < x \leq 18$, niin $8 < \xi < 18$, joten

$$\left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-8)^5 \right| < \frac{880}{243 \cdot 5!} 8^{\frac{-14}{3}} 10^5 \approx 0{,}1841938872.$$

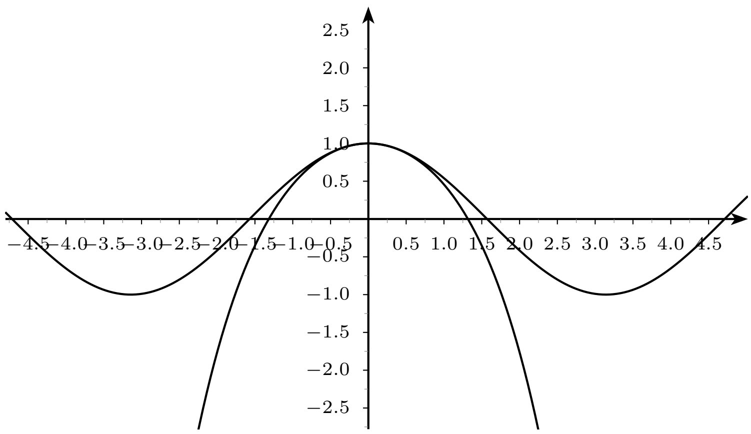
6. Funktioiden $\cos x$ ja $2 - \cosh x$ kuvaajat kulkevat lähellä toisiaan kun x on lähellä kohtaa $x = 0$. (Piirrä jos mahdollista näiden kuvaajat esim. välillä $[-1/2, 1/2]$.) Yritä selittää ilmiö tutkimalla Taylorin polynomien avulla erotusfunktiota $f(x) = \cos x - (2 - \cosh x)$. Mille eksponenteille n on olemassa (äärellinen) raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}?$$

Ratkaisu. Derivoidaan funktiota f muutaman kerran:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x - (2 - \cosh x) \\
f'(x) &= -\sin x + \sinh x \\
f^{(2)}(x) &= -\cos x + \cosh x \\
f^{(3)}(x) &= \sin x + \sinh x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x + \cosh x \\
f^{(5)}(x) &= -\sin x + \sinh x
\end{aligned}$$

Tästä eteenpäin derivaatat muodostavat jonon, jonka jäsenet toistuvat neljän termin välein.



Kuva 1: Funktiot $\cos x$ ja $2 - \cosh x$

Siispä funktion f Taylorin sarja pisteessä 0 alkaa

$$0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 \ldots,$$

eli $T_n(x;0)$ on nollafunktio kaikilla $n = 0, \ldots, 3$. Koska derivaattojen jono on jaksollinen, huomataan, että

$$T_n(x;0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{(4k)!} x^{4k}, & \text{kun } n \geq 4, \text{ ja } m \text{ on suurin luku, jolla } 4m \leq n \\ 0, & \text{kun } n < 4. \end{cases}$$

Tutkitaan miten miten lähellä toisiaan funktiot cos ja cosh ovat välillä $[-1/2, 1/2]$. Molemmat funktiot ovat tunnetusti parillisia, joten riittää tutkia väliä $[0, 1/2]$. Olkoon nyt $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Koska $f \in C^n(B(0,h))$ millä tahansa $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$, ovat Taylorin kaavan oletukset voimassa, ja voidaan kirjoittaa

$$f(x) = T_{n-1}(x;0) + R_n(x;0) = T_{n-1}(x;0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n$$

jollain $\xi \in]0, x[$. Sijoitetaan tähän $n = 4$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \underbrace{0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3}_{T_{n-1}(x;0)} + \frac{\cos\xi + \cosh\xi}{4!}x^4 \right| \\ &= \frac{|\cos\xi + \cosh\xi|}{4!}x^4 \\ &\leq \frac{1 + \cosh\frac{1}{2}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &\approx 0{,}00554 \end{aligned}$$

joten funktioiden cos ja cosh erotus tällä välillä on enintään noin $0,00294$.

Tutkitaan nyt kysyttyjen raja-arvojen olemassaoloa. Taylorin kaavaa taas soveltaen, f voidaan ilmaista muodossa

$$f(x) = T_n(x;0) + x^n\varepsilon(x), \text{ missä } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Ylläolevan huomion nojalla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$$

on olemassa ainakin kaikilla $n = 0, \ldots, 3$, sillä tällöin

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{T_n(x;0) + x^n\varepsilon(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} 0 + \varepsilon(x) = 0.$$

Kun $n = 4$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{4!x^4}x^4 + \varepsilon(x) = \frac{1}{12}$$

ja kun $n > 4$, ja $0 < x < 1$, niin $T_n(x;0) = \sum_{k=1}^{m}\frac{2}{(4k)!}x^{4k}$, missä m kuten yllä, joten

$$T_n(x;0) \geq \frac{2}{4!}x^4$$

ja siten

$$\frac{f(x)}{x^n} \geq \frac{\frac{2}{4!}x^4 + x^n\varepsilon(x)}{x^n} = \frac{2}{4!}x^{4-n} + \varepsilon(x) \geq \frac{2}{4!}x^{-1} + \varepsilon(x) \to \infty,$$

kun $x \to 0+$. Täten myös $\frac{f(x)}{x^n} \to \infty$, joten raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$$

ei voi olla olemassa.