MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 10
11. 4. 2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Esko Heinonen)

1. Oletetaan, että potenssisarjan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$$

suppenemissäde on 7. Mikä on sarjan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (x-3)^k$$

suppenemissäde?

Ratkaisu: Merkitään $y = x - 2$. Nyt sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y-1)^k$$

suppenee, kun $|y-1| < 7$, joten sen osasummien jono $\sum_{k=0}^{n} a_k (y-1)^k$ suppenee kohti kyseistä sarjaa. Tällöin lauseen III.1.9. nojalla myös vakiolla 7 kerrottu osasummien jono

$$7 \sum_{k=0}^{n} a_k (y-1)^k = \sum_{k=0}^{n} 7a_k (y-1)^k$$

suppenee kohti sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (y-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (x-3)^k, \quad |x-3| < 7.$$

Jos $|y-1| > 7$ niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (y-1)^k$ hajaantuu ja siten myös

$$7 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (y-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (x-3)^k$$

hajaantuu. Siis myös sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} 7a_k (x-3)^k$ suppenemissäde on 7.

2. Merkitään

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (x-1)^k.$$

Mikä on kyseisen sarjan suppenemissäde? Millä luvuille $a > 0$ pätee, että sarja suppenee tasaisesti välillä $[1-a, 1+a]$? Laske $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ ja $f'''(1)$.

Ratkaisu: Nyt $a_k \neq 0$ kaikilla $k \geq 1$, joten käytetään hyväksi lausetta V.1.8.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2}{k^2+2k+1}\right| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{1+2/k+1/k^2}\right| = 1.$$

Siis sarjan suppenemissäde on 1.

Tasainen suppeneminen: Jos $x = 2$, niin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2(2-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2$$

hajaantuu ja siten sarja ei suppene millään $a \geq 1$, eikä se siis voi myöskään supeta tasaisesti.

Jos $0 < a < 1$ ja $x \in [1-a, 1+a]$, niin

$$\sup_{x\in[1-a,1+a]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2(x-1)^k\right| \leq \sup_{x\in[1-a,1+a]}\sum_{k=n+1}^{\infty}|k^2(x-1)^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2a^k \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

sillä kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi ja täten suppeneminen on tasaista välillä $[1-a, 1+a], \quad 0 < a < 1$.

Lauseen V.2.5. nojalla funktiolla f on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat välillä $]0, 2[$ ja

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)k^2(x-1)^{k-n}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-1) = 0\\
f'(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot k^2\cdot 0^{k-1} = 1\cdot 1^2 = 1\\
f''(1) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)k^2\cdot 0^{k-2} = 2\cdot 1\cdot 2^2 = 2!\cdot 2^2 = 8\\
f'''(1) &= \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)k^2\cdot 0^{k-3} = 3!\cdot 3^2 = 54.
\end{aligned}$$

3. Esitä funktio $f(x) = \frac{1}{1-x^5}$ potenssisarjana, joka suppenee välillä $]-1, 1[$ ja määritä tämän avulla funktion 15. ja 16. derivaatta kohdassa $x = 0$. Vihje: geometrinen sarja.

Ratkaisu: $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$ on suppeneva geometrinen sarja, kun $|y| < 1$ ja tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}.$$

Merkitään $y = x^5$, jolloin funktiolle f saadaan sarjaesitys

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^5} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{5k},$$

joka suppenee, kun $|x^5| < 1$ eli kun $x \in] - 1, 1[$.

Derivaattojen laskemista varten kannattaa sarjan summa kirjoittaa muotoon

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

missä

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = 0, 5, 10, 15, \dots \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Sovelletaan lausetta V.2.5.: sarjan kehityskeskus on $x_0 = 0$ ja kerroinjono on (a_k), joten

$$\begin{aligned} f^{(15)}(0) &= 15! \cdot a_{15} = 15! \\ f^{(16)}(0) &= 16! \cdot a_{16} = 16! \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

4. Oletetaan, että kaikilla k pätee $|a_k| \leq |b_k|$. Yritä muotoilla ja todistaa sarjojen $\sum a_k(x - x_0)^k$ ja $\sum b_k(x - x_0)^k$ suppenemissäteitä koskeva yhteys.

Ratkaisu: Muotoillaan ensin lause: Olkoon R_1 sarjan $\sum a_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde ja R_2 sarjan $\sum b_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde. Jos kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $|a_k| \leq |b_k|$, niin silloin suppenemissäteille pätee $R_1 \geq R_2$.

Todistus. Olkoon $x \in]x_0 - R_2, x_0 + R_2[$. Tällöin sarja $\sum b_k(x - x_0)$ suppenee itseisesti lauseen V.1.4. nojalla. Lisäksi

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k(x - x_0)^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(x - x_0)^k|,$$

joten osasummien jono on ylhäältä rajoitettu ja siten majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum a_k(x - x_0)^k$ suppenee pisteessä x. Koska x oli mielivaltaisesti valittu piste, niin sarja $\sum a_k(x - x_0)^k$ suppenee ainakin välillä $]x_0 - R_2, x_0 + R_2[$ ja tällöin $R_1 \geq R_2$. □

5. Merkitään

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ja

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots.$$

Osoita, että nämä sarjat määrittelevät koko lukusuoralla funktiot $s(x)$ ja $c(x)$ ja, että kaikilla x pätee $s'(x) = c(x)$ ja $c'(x) = -s(x)$. (Kannattaa tutkia monisteen sivuja 116 ja 117.)

Ratkaisu: Merkitään $f_k(x) = (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ja $g_k(x) = (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$. Kun $x \neq 0$, niin

$$\left|\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}\right| = \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+3)} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

ja

$$\left|\frac{g_{k+1}(x)}{g_k(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}}\right| = \frac{|x|^2}{(2k+1)(2k+2)} \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

joten suhdetestin nojalla sarjat $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ja $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ suppenevat itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja täten lauseen III.1.13. nojalla myös sellaisenaan. Toisaalta $f_k(0) = 0$ kaikilla $k \geq 0$ ja $g_k(0) = 0$ kaikilla $k \geq 1$, joten sarjat suppenevat kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja näin ollen funktiot s ja c ovat hyvinmääriteltyjä.

Lauseen V.2.5. nojalla funktioita s ja c esittävät sarjat voidaan derivoida termeittäin ja tällöin jokaisella $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\begin{aligned} s'(x) &= D\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} D\left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = c(x) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} c'(x) &= D\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} D\left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2k)\frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -s(x) \end{aligned}$$

6. (Jatkoa edelliseen) Osoita, (a) että kaikilla x ja y pätee

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \text{ ja } c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

ja (b), että

$$\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=1.$$

Ratkaisu:
a) Olkoon $x\in\mathbb{R}$ kiinteä. Määritellään funktiot $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ja $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}A(y) &= s(x+y)-s(x)c(y)-c(x)s(y)\\ B(y) &= c(x+y)-c(x)c(y)+s(x)s(y).\end{aligned}$$

Edellisen tehtävän nojalla nämä ovat derivoituvia ja

$$\begin{aligned}A'(y) &= c(x+y)+s(x)s(y)-c(x)c(y)=B(y) \text{ sekä}\\ B'(y) &= -s(x+y)+c(x)s(y)+s(x)c(y)=-A(y).\end{aligned}$$

Määritellään lisäksi funktio $F(y)=A(y)^2+B(y)^2$ kaikilla $y\in\mathbb{R}$. Nyt F on derivoituva ja

$$F'(y)=2A(y)A'(y)+2B(y)B'(y)=2A(y)B(y)-2B(y)A(y)=0 \text{ kaikilla } y\in\mathbb{R},$$

joten F on vakiofunktio. Lisäksi huomataan, että

$$\begin{aligned}A(0) &= s(x)-s(x)=0 \text{ ja}\\ B(0) &= c(x)-c(x)=0,\end{aligned}$$

joten $F(0)=A(0)^2+B(0)^2=0$ ja siten $F=0$ kaikilla $y\in\mathbb{R}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että funktiot A ja B ovat nollafunktioita ja siten on voimassa

$$\begin{aligned}s(x+y) &= s(x)c(y)+c(x)s(y) \quad \text{ja}\\ c(x+y) &= c(x)c(y)-s(x)s(y).\end{aligned}$$

b) Kun $x\neq 0$, niin

$$\begin{aligned}\frac{s(x)}{x} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\\ &= \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right)\underset{x\to 0}{\to} 1+\sum_{k=1}^{\infty}0=1.\end{aligned}$$

Lauseen V.2.2. nojalla summafunktio on jatkuva suppenemisvälillään, joten erityisesti se on jatkuva pisteessä $x=0$ ja täten summan raja-arvo voidaan laskea suoraan sijoittamalla summaan piste $x=0$.

Toisaalta funktiot $s(x)$ ja x ovat derivoituvia kohdassa $x = 0$ sekä $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$ ja $\lim_{x\to 0} x = 0$, joten vaihtoehtoisesti hyödyntämällä tehtävässä 5 laskettuja derivaattoja ja käyttämällä l'Hospitalin sääntöä saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{D(s(x))}{D(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{c(x)}{1} = c(0) = 1.$$