MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 1
24.1.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Esko Heinonen)

Ratkaisuista: Tehtävissä 1.-4. harjoitellaan käytännön integrointia ja erilaisia integrointimenetelmiä. Näissä tehtävissä tarvitaan Analyysin peruslausetta (luentomoniste s.18), jonka mukaan jatkuvan funktion määrätty integraali voidaan laskea integraalifunktion avulla.

Analyysin peruslause: Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja F jokin f:n integraalifunktio välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(x)dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a).$$

1. Laske

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3}\, dx.$$

Tunnista yhdistetyn funktion derivaatta.

Ratkaisu: Havaitaan, että integroitava funktio on vakiokerrointa vaille funktion $x \mapsto e^{x^3}$ derivaatta. Merkitään nyt $f(x) = 3x^2e^{x^3}$ ja $F(x) = e^{x^3}$. Yhdistetyn funktion derivointisäännön nojalla $D(e^{x^3}) = e^{x^3} \cdot D(x^3) = 3x^2e^{x^3}$ kaikilla $x \in [0, 1]$, joten F on funktion f eräs integraalifunktio välillä $[0, 1]$. Toisaalta $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx$, joten voimme laskea kysytyn integraalin analyysin peruslauseen avulla:

$$\int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\Big/_0^1 e^{x^3} = \frac{1}{3}(e^1 - e^0) = \frac{1}{3}(e - 1).$$

2. Laske

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Syksyn monisteen sivu 85 auttaa.

Ratkaisu: Syksyn monisteen sivun 85 avulla huomataan, että integroitava funktio on areahyperbolisen sinin eli hyperbolisen sinin käänteisfunktion derivatta, ts.

$$D(\text{arsinh } x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ kaikilla } x \in [0, 1].$$

Monisteessa areahyperboliselle sinille on myös esitys $\operatorname{arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Näiden tietojen ja analyysin peruslauseen avulla voimme laskea annetun integraalin:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \Big/_0^1 \operatorname{arsinh} x = \Big/_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

3. Laske

$$\int_1^2 x \ln x \, dx.$$

Osittaisintegrointi auttaa.

Ratkaisu: Tässä tehtävässä integraalifunktio on vaikea löytää päässälaskulla, joten emme saa laskettua sitä suoraan, kuten tehtävissä 1 ja 2. Sen sijaan voimme seurata vihjettä ja soveltaa osittaisintegrointia (monisteessa sivulla 23):

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Valitaan $f'(x) = x$ ja $g(x) = \ln x$, jolloin $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$. Nämä ovat jatkuvia ja derivoituvia funktioita välillä $[1, 2]$, joten osittaisintegrointilauseen oletukset ovat voimassa. Nyt

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x \, dx &= \Big/_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \Big/_1^2 \frac{1}{2}x^2 \ln x - \Big/_1^2 \frac{1}{4}x^2 \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - (1 - \frac{1}{4}) = \ln 4 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

4. Laske sijoituksella $x^3 = t$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx.$$

Huomaa, että kyse on samasta integraalista kuin tehtävässä 1, mutta nyt täytyy käyttää eri menetelmää!

Ratkaisu: Merkitään $t = x^3$, jolloin "$dt = 3x^2 dx$". Kun käytetään sijoitusmenetelmää, muuttuvat yleensä myös integrointirajat, mutta tällä kertaa ne pysyvät samoina:

$x = 0 \Rightarrow t = 0^3 = 0$
$x = 1 \Rightarrow t = 1^3 = 1.$

Tehdään nyt sijoitus $t = x^3$ ja lasketaan kysytty integraali analyysin peruslauseen avulla.

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3}\Big/_0^1 e^t = \frac{1}{3}(e-1).$$

Huomautus: Tässä sovellettiin monisteen huomautuksen 6.4. (s.22) kohtaa 2.

$$\int_a^b g(\psi(x))\psi'(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(t)\, dt, \text{ missä } \psi(x) = t.$$

Tässä tehtävässä $g(x) = e^x$ ja $\psi(x) = x^3$. Termi $\psi'(x) = 3x^2$ on siis sisäfunktion derivaatta. Merkintä "$\psi'(x)\, dx = dt$" on vain kätevä muistisääntö.

5. Tarkastellaan välin $[0, 1]$ jakoja $D_1 = \{0, 1/3, 1\}$ ja $D_2 = \{0, 2/3, 1\}$. Anna esimerkki näiden yhteisestä tihennyksestä.

Ratkaisu: Jako D on jaon D' tihennys, mikäli $D' \subset D$. Jakoon siis mahdollisesti lisätään pisteitä, mutta alkuperäiset pisteet pysyvät ennallaan. Kahden jaon yhteinen tihennys tarkoittaa jakoa, joka sisältää kummankin jaon kaikki jakopisteet. Ratkaisuksi siis kelpaa esimerkiksi jako $D = D_1 \cup D_2 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$, koska nyt pätee sekä $D_1 \subset D$ että $D_2 \subset D$. Toisaalta tähän voidaan halutessa lisätä muitakin jakopisteitä ja niinpä esimerkiksi jako $\{0, 1/100, 1/3, 2/3, 99/100, 1\}$ on myös jakojen D_1 ja D_2 yhteinen tihennys.

6. Tarkastellaan funktota $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x) = 1$ kun $x \neq 1$ ja $f(1) = 3$. Anna esimerkki välin $[0, 2]$ jaosta D, jolla pätee $S_D - s_D < 2^{-1000}$.

Ratkaisu: Palauettaan mieleen jakoon $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ liittyvien ylä- ja alasummien määritelmät:

$$S_D = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) : x \in \Delta_k\} \cdot l(\Delta_k) \text{ ja}$$

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in \Delta_k\} \cdot l(\Delta_k),$$

missä Δ_k on jakoväli $[x_{k-1}, x_k]$ ja $l(\Delta_k)$ jakovälin pituus.

Huomataan, että koska funktio f eroaa ykkösestä vain pisteessä $x = 1$, niin $\inf\{f(x) : x \in \Delta_k\} = 1$ kaikilla jakoväleillä Δ_k, olipa kyseessä mikä tahansa välin $[0, 2]$ jako. Toisaalta myös $\sup\{f(x) : x \in \Delta_k\} = 1$ jokaisella jakovälillä Δ_k, joka ei sisällä pistettä 1. Siis ylä- ja alasummien termit eroavat toisistaan vain pisteen 1 sisältävän jakovälin kohdalla, joten riittää eristää piste 1 niin kapealle välille, että ylä- ja alasummien erotus saadaan halutun pieneksi. Muotoillaan tämä täsmällisesti:

Olkoon $0 < \delta < 1$ (jolloin $0 < 1-\delta < 1 < 1+\delta < 2$) ja määritellään jako $D = \{0, 1-\delta, 1+\delta, 2\}$. Jakovälit ovat

$$\Delta_1 = [0, 1-\delta], \Delta_2 = [1-\delta, 1+\delta] \text{ ja } \Delta_3 = [1+\delta, 2].$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
S_D - s_D &= \sup\{f(x) : x \in \Delta_1\} \cdot l(\Delta_1) + \sup\{f(x) : x \in \Delta_2\} \cdot l(\Delta_2) \\
&+ \sup\{f(x) : x \in \Delta_3\} \cdot l(\Delta_3) - \inf\{f(x) : x \in \Delta_1\} \cdot l(\Delta_1) \\
&- \inf\{f(x) : x \in \Delta_2\} \cdot l(\Delta_2) - \inf\{f(x) : x \in \Delta_3\} \cdot l(\Delta_3) \\
&= 1 \cdot l(\Delta_1) + 3 \cdot l(\Delta_2) + 1 \cdot l(\Delta_3) - 1 \cdot l(\Delta_1) - 1 \cdot l(\Delta_2) - 1 \cdot l(\Delta_3) \\
&= 2 \cdot l(\Delta_2) = 2 \cdot 2\delta = 4\delta.
\end{aligned}$$

Nyt täytyy olla $4\delta < 2^{-1000} \Leftrightarrow \delta < \frac{2^{-1000}}{4}$, joten voimme valita vaikka $\delta = \frac{2^{-1000}}{8} = 2^{-1003}$. Tällöin

$$S_D - s_D = 4 \cdot \frac{2^{-1000}}{8} = \frac{2^{-1000}}{2} < 2^{-1000}.$$

Halutunlaiseksi jaoksi kelpaa siis jako

$$D = \{0, 1 - 2^{-1003}, 1 + 2^{-1003}, 2\}.$$