Analyysi II, 2. kurssikoe to 5.5.2011: Ratkaisut ja arvostelukommentit (Jouni Luukkainen)
Korvaavan kokeen 10.5. ratkaisuja ei tule erikseen. Tulokset ilmoitustaululle ke 18.5.
(Tämä tiedote on myös kurssin kotisivulla.)

Tehtävät on annettu aiheen mukaisessa järjestyksessä. Perustele vastauksesi huolellisesti!

1. *Suppeneeko sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{k^9+11}?$$

Ratk., I tapa. Koska

$$0 \le \frac{k^7}{k^9+11} \le \frac{k^7}{k^9+0} = \frac{1}{k^2} \quad \text{kaikilla } k \ge 1$$

ja koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ suppenee yliharmonisena, niin majoranttiperiaatteen nojalla tutkittava sarja suppenee.

Ratk., II tapa. Koska $k^7/(k^9+11) > 0$ kaikilla $k \ge 1$, koska

$$\frac{k^7}{k^9+11} : \frac{1}{k^2} = \frac{k^9}{k^9+11} = \frac{1}{1+11(1/k)^9} \to \frac{1}{1+11\cdot 0^9} = 1 \ne 0, \infty, \quad \text{kun } k \to \infty,$$

ja koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ suppenee yliharmonisena, vertailuperiaatteen nojalla tutkittava sarja suppenee.

Arvostelusta. Jos ei huomauttanut, että tutkittava sarja on ei-negatiivisterminen, sakkoa meni 1p. Arvio $k^7/(k^9+11) \ge k^7/(k^9+11k^9) = (1/12)(1/k^2) > 0$ on hyödytön. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ suppenemisen **kelvoton** perusteluyritys huomautuksella, että $1/k^2 \to 0$, kun $k \to \infty$, vei 2p.

2. *Tarkastellaan funktioita* $f_n\colon]-\infty, 7] \to \mathbb{R}$, *jotka on määritelty yhtälöillä*

$$f_n(x) = \frac{1}{n}e^x.$$

Suppeneeko jono (f_n) *pisteittäin joukossa* $]-\infty, 7]$? *Suppeneeko se tasaisesti joukossa* $]-\infty, 7]$?

Ratk. (i) (2 pist.) Jos $x \in]-\infty, 7]$, niin

$$f_n(x) = \frac{1}{n}e^x \to 0e^x = 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

joten jono (f_n) suppenee pistettäin joukossa $]-\infty, 7]$ kohti nollafunktiota $f\colon x \mapsto 0$.

(ii) (4 pist.) Koska

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in]-\infty, 7]\} = \sup_{x\le 7}\left|\frac{1}{n}e^x - 0\right| = \max_{x \le 7}\frac{1}{n}e^x = \frac{1}{n}e^7 \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

niin jono (f_n) suppenee tasaisesti joukossa $]-\infty, 7]$ kohti funktiota f.

Se, että $f_n \to f$ pisteittäin, seuraa myös siitä, että $f_n \to f$ tasaisesti.

(ii) vaihtoehtoisella tavalla: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon \ge e^7/\varepsilon$ (tai, sillä se on ilmeisesti luentojen sallimaa, valitaan $n_\varepsilon = e^7/\varepsilon \in \mathbb{R}$, jolloin ei siis vaadita, että $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$). Tällöin, jos $n \in \mathbb{N}$ ja $n > n_\varepsilon$, niin kaikilla $x \le 7$ on

$$(*) \qquad |f_n(x) - f(x)| = e^x/n \le e^7/n < e^7/n_\varepsilon \le \varepsilon.$$

Täten $f_n \to f$ tasaisesti.

Arvostelusta. Raja-arvot kannatti perustaa luentojen tulokseen, että $1/n \to 0$, kun $n \to \infty$. Raja-arvojen perustelu sen sijasta — tai tarpeettomasti sen ohessa! — $(\varepsilon, n_\varepsilon)$-määritelmällä tuotti hankaluuksia erityisesti (ii)-kohdassa, jonka väitteessä $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n > n_\varepsilon\, \forall x \in]-\infty, 7]$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ kvanttoreiden järjestyksellä ja oikealla sanallisella muotoilulla (”olkoon”/”valitaan”) on merkityksensä, vaikkakaan virheistä ja puutteista ei juuri sakotettukaan, vaan epäyhtälöketju (*) oli tulkinnassa ratkaiseva.

3. *Määritä potenssisarjan*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^7 (x-42)^k$$

suppenemissäde.

Ratk. Olkoon $R = \sup\{|x-42| \mid x \in \mathbb{R} \text{ arvo, jolla sarja suppenee}\}$ sarjan suppenemissäde.

I tapa. Olkoon $a_k = k^7$, kun $k \geq 0$. Tällöin on olemassa raja-arvo

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{k^7}{(k+1)^7} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^7} \to \frac{1}{(1+0)^7} = 1, \quad \text{kun } k \to \infty,$$

joten R on tämän raja-arvon suuruus: $R = \underline{1}$. (Raja-arvotulos voidaan päätellä myös päässälaskuna huomaamalla, että osoittajan k^7 lailla myös nimittäjä $(k+1)^7$ on k:n 7:nnen asteen polynomi, jossa k^7:n kerroin on sama 1.)

II tapa. On olemassa raja-arvo ($a_0 = 0$ ei haittaa)

$$\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^7}} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^7} \to \frac{1}{1^7} = 1, \quad \text{kun } 1 \leq k \to \infty,$$

joten R on tämän raja-arvon suuruus: $R = 1$. Tässä käytetty tulos $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ on osoitettu luennoissa (tod.: $\sqrt[k]{k} = k^{1/k} = e^{(1/k)\ln k} \to e^0 = 1$, kun $k \to \infty$).

III tapa. Jos $|x-42| \geq 1$, niin $k^7|x-42|^k \geq k^7 \to \infty$, kun $k \to \infty$, joten sarja hajaantuu tällä arvolla x; siis $R \leq 1$ (**2 pist.**). Jos taas $0 < |x-42| < 1$, niin

$$\frac{|(k+1)^7(x-42)^{k+1}|}{|k^7(x-42)^k|} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^7 |x-42| \to (1+0)^7|x-42| = |x-42| < 1, \quad \text{kun } 1 \leq k \to \infty,$$

joten suhdetestin nojalla sarja suppenee jopa itseisesti tällä arvolla x; tämä seuraa myös juuritestistä, sillä $\sqrt[k]{k^7|x-42|^k} = \sqrt[k]{k^7}|x-42| \to |x-42| < 1$, kun $k \to \infty$. Siis $R \geq 1$ (**4 pist.**). Täten $R = 1$.

Arvostelusta. Itseisarvomerkkien puuttuminen kaavoista $\lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}| = R$ ja $\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{|a_k|} = R$ vei 1p. Osoittajan ja nimittäjän sotkeminen keskenään näissä kaavoissa vei 2p (silloin itseisarvojen puuttumisesta ei sakotettu erikseen), vaikka silloinkin sai $R = 1$. Raja-arvon $(1+1/k)^7 \to 1$ muuttuminen raja-arvoksi $(1+1/k)^k \to e$ vei 1p. Lausekkeen $\sqrt[k]{k^7} = k^{7/k}$ raja-arvon 1 perustelu huomautuksella, että $7/k \to 0$, ottamatta samalla huomioon kantaluvun k muuttuvuutta vei 2p (raja-arvon muoto ∞^0 ei olisi määrittelemättömyytensä tähden kelvannut korjaukseksi).

4. (a) *Muodosta Taylorin polynomi $T_3(x;1)$ funktiolle f, joka on määritelty arvoille $x > 0$ ehdolla $f(x) = \ln x$.*
(b) *Selvitä* (a)-*kohdan tulokseen liittyvän Taylorin kehitelmän avulla raja-arvo*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x + \frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}}{(x-1)^3}.$$

Ratk. (a) (2 pist.) Nyt $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ ja $f'''(x) = 2/x^3$, joten $f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ ja $f'''(1) = 2$. Täten

$$\mathrm{T}_3(x;1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = \underline{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) (4 pist.) Koska f''' on jatkuva välillä $]0,\infty[$, niin f:llä on Taylorin kehitelmä $f(x) = \mathrm{T}_3(x;1) + (x-1)^3\varepsilon(x)$ kaikilla $x > 0$ eräällä funktiolla ε, jolla $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$. Toisaalta nähdään, että funktiolle f on

$$T_2(x;1) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2.$$

Täten

$$\frac{\ln x + \frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}}{(x-1)^3} = \frac{\mathrm{T}_3(x;1) + (x-1)^3\varepsilon(x) - \mathrm{T}_2(x;1)}{(x-1)^3} = \frac{\frac{1}{3}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x)}{(x-1)^3} = \frac{1}{3} + \varepsilon(x)$$
$$\to \frac{1}{3} + 0 = \underline{\frac{1}{3}}, \quad \text{kun } x \to 1.$$

II tapa. Myös $f^{(4)}(x) = -6/x^4$ on jatkuva välillä $]0,\infty[$, joten voidaan käyttää Taylorin kehitelmää muodossa $f(x) = \mathrm{T}_3(x;1) + \mathrm{R}_4(x;1)$ kaikilla $x > 0$ jäännösterminä (Lagrange)

$$\mathrm{R}_4(x;1) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-1)^4 = \frac{-6t^{-4}}{4!}(x-1)^4 = -\frac{1}{4}t^{-4}(x-1)^4$$

eräällä pisteellä t pisteiden 1 ja x välissä; tällöin

$$\frac{\ln x + \frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}}{(x-1)^3} = \frac{\mathrm{T}_3(x;1) - \frac{1}{4}t^{-4}(x-1)^4 - \mathrm{T}_2(x;1)}{(x-1)^3} = \frac{\frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}t^{-4}(x-1)^4}{(x-1)^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t^{-4}(x-1)$$
$$\to \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdot 1^{-4}\cdot 0 = \frac{1}{3}, \quad \text{kun } x \to 1.$$

Arvostelusta. (a) Taylorin kehitelmä ei f:lle ole Taylorin polynomi (sakkoa 1p). Lauseke $f(x) + f'(x)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(x-1)^3$ taas ei ole edes polynomi.

(b) Oikeasta Taylorin kehitelmästä sai 1p. Tähän ei vaadittu huomautusta, että f''' on jatkuva (tai $f^{(4)}$ on jatkuva), mutta vaadittiin huomautus, että $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$ (tai että t on 1:n ja x:n välissä). Osoittajassa $\ln x$:n osan $\mathrm{T}_2(x;1)$ ja lausekkeen $\frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}$ vastakkainmenon huomaaminen toi 1p. Korvaamalla $\ln x$:n pelkällä Taylorin polynomilla $\mathrm{T}_3(x,1)$ ilman jäännöstermiä vei 2p. Taylorin kehitelmässä jäännöstermin virheellinen muoto $(x-1)^4\varepsilon(x)$, jossa $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$ mutta jossa on liian suuri potenssi 4 (tämän virheen silti helpottamatta ratkaisua) vei 1p. Jäännöstermin muodot $(x-1)^2\varepsilon(x)$ ja $(x-1)\varepsilon(x)$, joissa $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$, ovat sinänsä oikeita mutta riittämättömiä, sillä niiden yhteydessä ei voinut supistaa lauseketta $(x-1)^3$. Raja-arvon suuruuden tuli olla täysin oikein. Oikeaan lukuun saattoi päätyä monenlaisten virheellisten tai puutteellisten vaiheiden kautta, sillä se on viime kädessä vain lauseke $f'''(1)/3! = 1/3$.