MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 4
14 . 2. 2011 alkavalle viikolle
Esimerkkiratkaisuja, Jani Hannula, 7 sivua

1. Laske
$$\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx.$$

Ratkaisu. Muokataan aluksi integroitava sellaisten funktioiden summaksi, jotka osataan integroida:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx &= \int_2^3 \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx \\
&= \int_2^3 \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2-1+2}{x+1}\right) dx \\
&= \int_2^3 \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^3 2x\frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_2^3 x-1\, dx \\
&\quad + 2\int_2^3 \frac{1}{x+1}\, dx.
\end{aligned}$$

Integroidaan seuraavaksi summattavat integraalit. Ensimmäinen saadaan tunnistamalla yhdistetyn funktion derivointi:

$$\frac{1}{2}\int_2^3 2x\frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\Big/_2^3 \ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln 10 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{5} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Toinen integraali voidaan laskea kun muistetaan, että $D(\arctan(x)) = 1/(x^2+1)$:

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2+1} = \Big/_2^3 \arctan(x) = \arctan 3 - \arctan 2.$$

Kolmas integroitava on polynomifunktiona helppo integroida:

$$\int_2^3 x-1\, dx = \Big/_2^3 \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{9}{2} - 3 - (2-2) = \frac{3}{2}.$$

Viimeiseksi integraaliksi saadaan

$$2\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\Big/_{2}^{3} \ln(x+1) = 2(\ln 4 - \ln 3) = 2\ln\frac{4}{3},$$

joten lopulta saadaan

$$\begin{aligned}\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx &= \frac{1}{2}\ln 2 + \arctan 3 - \arctan 2 + \frac{3}{2} + 2\ln\frac{4}{3} \\ &= \ln\sqrt{2} + \ln\frac{16}{9} + \arctan 3 - \arctan 2 + \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2. Laske

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\,dx$$

Vihje: suorita juuren alla neliöksi täydentäminen ja muokkaa integroitava muotoon $\sqrt{1-p(x)^2}$ ja sijoita sitten $p(x) = \sin t$.

Ratkaisu. Aloitetaan vihjeen mukaisesti täydentämällä neliöön:

$$-x^2 - 2x + 1 = 2 - (x^2 + 2x + 1) = 2 - (x+1)^2.$$

Muokataan integroitava vihjeen mukaiseen muotoon:

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2-2x+1} &= \sqrt{2-(x+1)^2} = \sqrt{2\,\left(1 - \frac{(x+1)^2}{2}\right)} \\ &= \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{2}} \\ &= \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}.\end{aligned}$$

Näin ollen tutkittava integraali saa muodon

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{2}\,\sqrt{1-p(x)^2},$$

missä $p(x) = (x+1)/\sqrt{2}$. Sijoitetaan $p(x) = \sin t$. Olkoon siis $\phi(t) = \sqrt{2}\sin t - 1$, jolloin $\phi'(t) = \sqrt{2}\cos t$. Uusiksi rajoiksi saadaan

$$\begin{cases} \phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \Leftrightarrow \alpha = \arcsin \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-1+1}{\sqrt{2}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \\ \phi(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 \Leftrightarrow \beta = \arcsin \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1+1}{\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

ja integraali saadaan muotoon:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\,dx &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{2}\ \sqrt{1-p(x)^2}\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}\ \sqrt{1-\left(\frac{\phi(t)+1}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \phi'(t)\ dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\ \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \sqrt{2}\cos t\ dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2 t\ dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t) + 1\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2(\cos(2t)+1)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos(2t)\ dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\ dt \\
&= \frac{1}{2} \Big/_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2t) + \Big/_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t \\
&= \frac{1}{2}(\sin(2\pi/3) - \sin(\pi/3)) + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

3. Määritä sivulla 41 olevan seurauslausee 9.11. avulla funktion $f(x) = x^2$ kohtien $x = 0$ ja $x = 1$ väliin jäävän kuvaajan osan pituus. Vihje: integraalissa kannattaa käyttää sijoitusta $x = \frac{1}{2}\sinh t$.

Ratkaisu. Seurauslauseen 9.11. mukaan välillä $[a, b]$ jatkuvasti derivoituvan funktion f graafin pituus on

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx.$$

Funktio $f(x) = x^2$ on selvästi jatkuvasti derivoituva välillä $[0, 1]$ ja $f'(x) = 2x$, joten graafin pituus saadaan laskemalla integraali

$$\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx.$$

Tehdään sijoitus $x = (1/2)\sinh t = \phi(t)$. Integroimisrajoiksi saadaan

$$\begin{cases} \phi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{ar}\sinh(2\cdot 0) = \operatorname{ar}\sinh 0 = \ln(0+\sqrt{0^2+1}) = \ln 1 = 0 \\ \phi(\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = \operatorname{ar}\sinh(2\cdot 1) = \operatorname{ar}\sinh 2 = \ln(2+\sqrt{2^2+1}) = \ln{(2+\sqrt{5})}. \end{cases}$$

Lasketaan integraali sijoituksella:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+4\phi(t)^2}\cdot \phi'(t)\ dt \\
&= \int_0^{\ln{(2+\sqrt{5})}} \sqrt{1+\sinh^2 t}\cdot \frac{1}{2}\cosh t\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\ln{(2+\sqrt{5})}} \cosh^2 t\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\ln{(2+\sqrt{5})}} \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\ dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\ln{(2+\sqrt{5})}} (e^t+e^{-t})^2\ dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\ln{(2+\sqrt{5})}} e^{2t}+2+e^{-2t}\ dt \\
&= \frac{1}{8}\ \Big/_{0}^{\ln{(2+\sqrt{5})}} \frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t} \\
&= \frac{1}{8}\ \Big/_{0}^{\ln{(2+\sqrt{5})}} \frac{1}{2}(e^t)^2+2t-\frac{1}{2}(e^{-t})^2 \\
&= \frac{1}{8}\Bigg((\frac{1}{2}(2+\sqrt{5})^2 + 2(\ln(2+\sqrt{5})) - \frac{1}{2(2+\sqrt{5})^2}) \\
&\quad -(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\Bigg) \\
&= \frac{1}{16}(2+\sqrt{5})^2 + \frac{1}{4}(\ln(2+\sqrt{5})) - \frac{1}{16(2+\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{1}{4}(\ln(2+\sqrt{5})) + \frac{1}{16}\left(9+4\sqrt{5}-\frac{1}{9+4\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{1}{4}(\ln(2+\sqrt{5})) + \frac{1}{16}\big(9+4\sqrt{5}-(9-4\sqrt{5})\big) \\
&= \frac{1}{4}(\ln(2+\sqrt{5})) + \frac{1}{2}\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

4. Miksi

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

täytyy tulkita epäoleelliseksi integraaliksi? Suppeneeko vai hajaantuuko se?

Ratkaisu. Tehtävän integraali on tulkittava epäoleelliseksi integraaliksi, koska funktiota $f(x) = x/(x^2-1)$ ei ole määritelty, kun $x = 1$ ja vaikka se erikseen määriteltäisiin, f ei ole välillä $[0,1]$ rajoitettu. Tästä seuraa (Riemann-integraalin määritelmän mukaan), ettei funktio f ole välillä $[0,1]$ Riemann-integroituva.

Olkoon $b \in\,]0,1[$. Tutkitaan epäoleellisen integraalin mahdollista suppenemista:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{x}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^b 2x\frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_{0}^{b} \ln|x^2-1| \\
&= \frac{1}{2}(\ln|b^2-1| - \ln 1) \\
&= \frac{1}{2}\ln|b^2-1|.
\end{aligned}$$

Tiedetään, että $\ln x \to -\infty$, kun $x \to 0+$. Näin ollen $(1/2)\ln|b^2-1| \to -\infty$, kun $b \to 1$, joten tehtävän epäoleellinen integraali hajaantuu.

5. Oletetaan, että funktio $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja derivoituva sekä sen derivaatta jatkuva välillä $[1,3]$ Oletetaan lisäksi, että $f(1) = 2$ ja $f(3) = 5$ ja että$\int_1^3 f(t)\,dt = 8$. Laske käänteisfunktion integraali

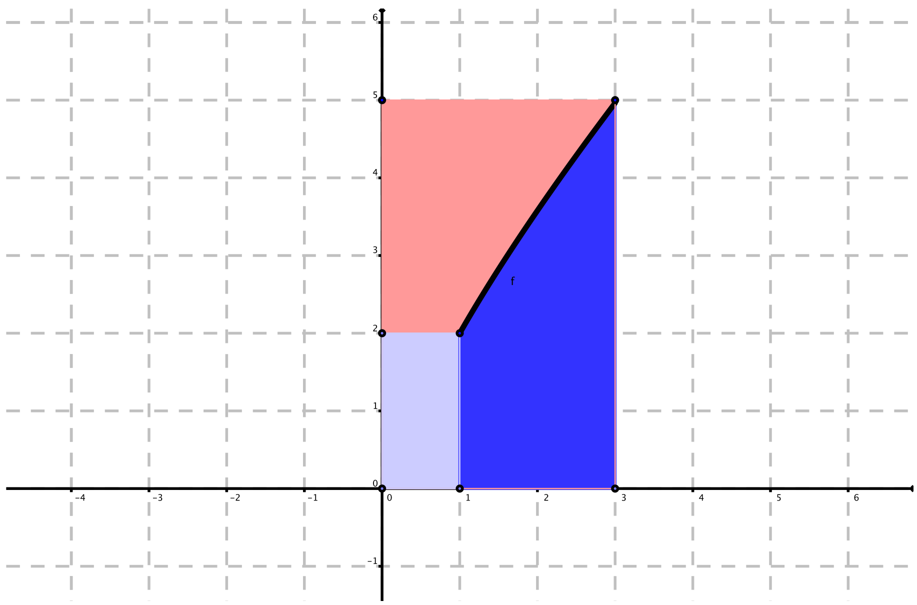
$$\int_2^5 f^{-1}(x)\,dx.$$

Vihje: Sijoita käänteisfunktion integraaliin $x = f(t)$. Vastaan tulevan lausekkeen $tf'(t)$ integroinnissa kannattaa käytää osittaisintegrointia. Piirrä kuva!

Ratkaisu. Analyysi I -kurssilla opittiin[1], että jollakin välillä määritellyllä aidosti kasvavalla jatkuvalla funktiolla on olemassa käänteisfunktio, jonka lähtöjoukko on alkuperäisen funktion kuva. Erityisesti funktiolla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : f[a,b] \to [a,b]$, missä $f[a,b]$ on funktion f kuva, joka on suljettu väli. Tutkittava funktio on aidosti kasvava ja derivoituvana jatkuva, joten käänteisfunktio on olemassa.

Kuvassa 1 on hahmoteltu tehtävän tilannetta. Graafisesti tulkittuna käänteisfunktion integraali on suorien $y = 2$, $y = 5$, $x = 0$ ja funktion f graafin väliin jäävän alueen pinta-ala. Kuvasta päätellen integraaliksi tulee $15 - 8 - 2 = 5$. Varmistetaan graafisen tulkinnan pätevyys laskemalla integraali.

[1] Monisteen lause 6.9.



Kuva 1: Tehtävän 5 tilanteen hahmotelma.

Tehdään sijoitus $x = f(t)$. Uusiksi rajoiksi saadaan

$$\begin{cases} f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(2) = 1 \\ f(\beta) = 5 \Leftrightarrow \beta = f^{-1}(5) = 3, \end{cases}$$

ja integraali saadaan laskettua osittaisintegroinnilla:

$$\begin{aligned} \int_2^5 f^{-1}(x)\,dx &= \int_1^3 f^{-1}(f(t)) \cdot f'(t)\,dt = \int_1^3 t \cdot f'(t)dt \\ &= \Big/_{1}^{3} t \cdot f(t) - \int_1^3 f(t)dt \\ &= 3 \cdot f(3) - f(1) - 8 \\ &= 15 - 2 - 8 \\ &= 5. \end{aligned}$$

6. Oletetaan, että funktion f toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $]-1,1[$. Oletetaan, että $x \in]0,1[$. (a) Tarkista ensin, että yhtälö

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

pätee kun $x \in]0,1[$. (b) Sovella sitten tähän integraaliin osittaisintegrointia ajattelemalla, että $f'(t) = 1f'(t)$ ja että 1 on lausekkeen $-(x-t)$ derivaatta t:n suhteen. Tuloksen pitäisi olla muotoa $f(x) = f(0) + xf'(0) +$ integraali. (Huom: tulos pätee myös kun $x \in]-1, 0[$.

Ratkaisu. Tarkitstetaan aluksi a) -kohdan yhtälön pätevyys. Koska funktio f on funktion f' eräs integraalifunktio pätee

$$\int_0^x f'(t)\ dt = \Big/_{0}^{x} f(x) = f(x) - f(0),$$

mikä on yhtäpitävää väitteen

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \tag{1}$$

kanssa. Integroidaan sitten tehtävänannon mukaisesti ajattelemalla, että $f'(t) = 1 \cdot f'(t)$ ja että 1 on lausekkeen $-(x-t)$ derivaatta t:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f'(t)\, dt &= \int_0^x 1 \cdot f'(t)\, dt = \Big/_{0}^{x} -(x-t)f'(t) - \int_0^x -(x-t)f''(t)\ dt \\
&= -(x-x)f'(x) - (-(x-0)f'(x)) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt \\
&= xf'(x) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä tulos yhtälöön (1) saadaan tehtävänannossa mainittu muoto

$$f(x) = f(0) + xf'(x) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt.$$

Kuten tehtävänannossa on huomautettu, tulos pätee myös kun $x \in\ ]-1, 0[$. Kun $x \in\ ]-1, 0[$ saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_x^0 f'(t)\ dt = \Big/_{x}^{0} f(x) = f(0) - f(x) \\
\Leftrightarrow\quad & f(x) = f(0) - \int_x^0 f'(t)\ dt \\
\Leftrightarrow\quad & f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt
\end{aligned}$$

ja aiemmin lasketun perusteella

$$f(x) = f(0) + xf'(x) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt.$$