MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 8, ratkaisuehdotuksia
Susanna Liesipohja

1. Tarkastellaan funktioita $f_n(x) = x^n$ välillä $]0,1[$.

Miten voidaan perustella, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $f_n(x) \to 0$ kun $n \to \infty$? (Vihje: Bernoullin epäyhtälö.)

Ratkaisu: Bernoullin epäyhtälö on $(1+x)^n \geq 1+nx$, kun $x > -1$. Koska $x \in]0,1[$, niin voidaan kirjoittaa $x = \frac{1}{y}$, kun $y > 1$. Kirjoitetaan vielä $y = 1+z$, missä $z > 0$. Nyt siis $x = \frac{1}{1+z}$. Lasketaan ja käytetään Bernoullin epäyhtälöa nimittäjän arvioimiseen:

$$|f_n(x) - 0| = |x^n| = \left(\frac{1}{1+z}\right)^n = \frac{1}{(1+z)^n} \leq \frac{1}{1+nz} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

2. Määritellään funktiot $f_n\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ lausekkeilla $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2x)$ kun $n = 1, 2, \ldots$ Hahmottele kuva. Suppeneeko jono $f_1, f_2, \ldots$ pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

Ratkaisu: Etsitään ensin rajafunktio: kun $n \to \infty$, niin $\frac{1}{n}\sin(n^2x) \to 0$. Siis rajafunktio $f(x) = 0$ kaikilla x. Tutkitaan nyt funktion jäsenten etäisyyttä rajafunktiosta:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin(n^2x) - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \left|\sin(n^2x)\right| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n}$$

(*) Koska $|\sin z| \leq 1$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$.

Etäisyydelle löydettiin siis muuttujasta x riippumaton yläraja.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$. Kun $n > n_\varepsilon$, niin kaikilla $x \in]0,1[$ pätee

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Siis $f_n \to f$ tasaisesti, mistä seuraa että $f_n \to f$ myös pisteittäin.

3. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3+n^4}}\, dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

Ratkaisu: Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään funktio $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3+n^4}}$ kaikilla $x \in [0,1]$. Jos $f_n \to f$ tasaisesti, niin integroinnin ja raja-arvon ottamisen järjestys voidaan vaihtaa, ja tällöin voidaan integroida suoraan rajafunktiosta. Etsitään rajafunktio:

$$\sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3+n^4}} \to \sqrt{x^2} = |x| \overset{(*)}{=} x$$

kun $n \to \infty$.
(*) Koska integrointivälillä $x \geq 0$.

Eli, rajafunktio on $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, missä $f(x) = x$. Tarkistetaan tasainen suppeneminen:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3+n^4}} - x \right| \overset{(1)}{=} \sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3+n^4}} - x \\
&\overset{(2)}{\leq} \sqrt{x^2} + \sqrt{\frac{5}{x^3+n^4}} - x = \sqrt{\frac{5}{x^3+n^4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^3+n^4}} \\
&\overset{(3)}{\leq} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n^4}} = \frac{\sqrt{5}}{n^2} \leq \frac{5}{n^2}.
\end{aligned}$$

(1) Koska $\sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3+n^4}} > x$.
(2) Koska $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
(3) Koska $x \geq 0$.

Etäisyydelle $|f_n(x) - f(x)|$ löydettiin siin muuttujasta x riippumaton yläraja.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq \sqrt{5}/\sqrt{\varepsilon}$ ja oletetaan, että $n > n_\varepsilon$ ja $x \in [0,1]$. Tällöin

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{5}{n^2} < \frac{5}{n_\varepsilon^2} \leq \varepsilon.$$

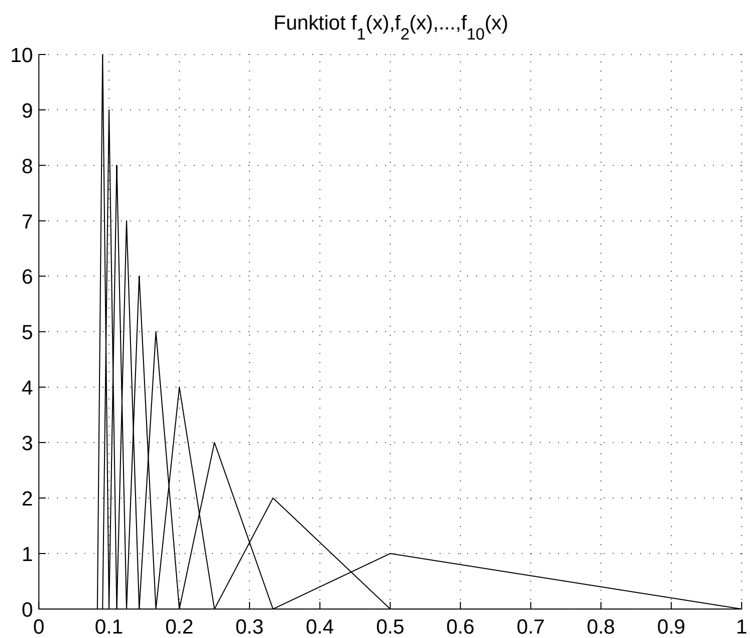
Siis $f_n \to f$ tasaisesti. Nyt voidaan laskea integraali helpommin:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{5}{x^3+n^4}}\,dx &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{5}{x^3+n^4}}\,dx \\ &= \int_0^1 x\,dx = \Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Määritellään funktiot $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ehdoilla $f(x) = 0$ kun $x \le \frac{1}{n+2}$ ja kun $x \ge \frac{1}{n}$. Väleillä $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$ ja $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ funktion kuvaaja on (edellisellä nouseva ja jälkimmäisellä laskeva) suora. Lopuksi tiedetään, että $f(\frac{1}{n+1}) = n$. Piirrä kuva!

Suppeneeko jono pisteittäin kohti erästä funktiota f? Ovatko kaikki f_n sekä f jatkuvia? Onko suppeneminen tasaista?

Ratlaisu: Piirretään kuva.



Funktioiden f_n kuvaajat ovat väleillä$\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right]$ piikin muotoisia. Kun n kasvaa, niin piikit muuttuvat korkeimmiksi ja siirtyvät lähemmäs kohtaa $x = 0$.

Funktiot f_n ovat jatkuvia, jos oletetaan, että välin $\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right]$ suorat saavat vain päätepisteissä arvon 0.

Tutkitaan funktiojonon suppenemista. Kuvan perusteella näyttäisi, että suppeneminen ei ainakaan ole tasaista. Jos funktio suppenee pisteittäin, niin sen rajafunktio tuntuisi olevan $f(x) = 0$ (joka on tunnetusti jatkuva).

Olkoon $x \in]0, 1]$. Nyt löytyy luku $n \in \mathbb{N}$, jolle $\frac{1}{n} < x$. Tällöin "piikki" jää luvun x vasemmalle puolelle, ja $f_n(x) = 0$. Pisteessä $x = 0$ pätee myös $f_n(x) = 0$, koska $0 < \frac{1}{n+2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Eli, jokaiselle pisteelle $x \in [0, 1]$ löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, niin että etäisyys $|f_n(x) - f(x)| = 0$, joten $f_n(x) \to f(x)$ pisteittäin.

Huomataan, että luvun n valinta riippuu kohdasta x, ja että

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = n \to \infty$$

kun $n \to \infty$. Joten suppeneminen ei ole tasaista.