MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 5
21.2.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia: Susanna Liesipohja

1. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{e^{\sin^{42}(\cos^{42}(x^{42}))}}{\sqrt[42]{x}}\,dx?$$

Ratkaisu: Koska $-1 \leq \sin t \leq 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin $0 \leq \sin^n t \leq 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja parillisilla n. Näin ollen

$$\frac{e^{\sin^{42}(\cos^{42}(x^{42}))}}{\sqrt[42]{x}} \geq \frac{e^0}{\sqrt[42]{x}} = \frac{1}{\sqrt[42]{x}} > 0$$

kaikilla $x \in [1, \infty[$.

Epäoleellinen integraali $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[42]{x}}\,dx$ hajaantuu, sillä

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt[42]{x}}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^{-\frac{1}{42}}\,dx = \lim_{c\to\infty} \Big/_1^c \frac{42}{41}x^{\frac{41}{42}} = \frac{42}{41}\lim_{c\to\infty}\left(c^{\frac{41}{42}} - 1\right) = \infty.$$

Minoranttiperiaatteen nojalla epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{e^{\sin^{42}(\cos^{42}(x^{42}))}}{\sqrt[42]{x}}\,dx$$

hajaantuu.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{x-1})}{\sqrt[3]{x}}\,dx?$$

Ratkaisu: Koska $t \mapsto e^t$ on kasvava, niin

$$0 < e^{-1} \leq e^{x-1} \leq e^0 = 1 < \frac{\pi}{2},$$

kun $x \in [0, 1]$. Koska $t \mapsto \sin t$ on kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, niin kaikilla $x \in [0, 1]$ pätee

$$0 \leq \sin(e^{x-1}) \leq \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Tästä päätellen edelleen, että

$$0 \leq \frac{\sin(e^{x-1})}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

kaikilla $x \in]0, 1]$.

Epäoleellinen integraali $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ suppenee, sillä

$$\lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{c \to 0+} \Big/_{c}^{1} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \lim_{c \to 0+} \left(1 - c^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}.$$

Majoranttiperiaatteen nojalla integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{x-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

suppenee.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{x-1})}{x^3}\, dx?$$

Ratkaisu: Edellisessä tehtävässä jo huomattiin, että

$$0 < e^{-1} \leq e^{x-1} \leq e^0 = 1 < \frac{\pi}{2}$$

kaikilla $x \in [0, 1]$, joten $0 \leq \sin(e^{-1}) \leq \sin(e^{x-1})$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Näin ollen

$$0 \leq \frac{\sin(e^{-1})}{x^3} \leq \frac{\sin(e^{x-1})}{x^3}$$

kaikilla $x \in]0, 1]$.

Epäoleellinen integraali $\int_0^1 \frac{\sin(e^{-1})}{x^3}\, dx$ hajaantuu, sillä

$$\lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{\sin(e^{-1})}{x^3}\, dx = \lim_{c \to 0+} \Big/_{c}^{1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(e^{-1})}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{c \to 0+} \left(\sin(e^{-1}) - \frac{\sin(e^{-1})}{c^2}\right) = \infty.$$

Minoranttiperiaatteen nojalla epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{x-1})}{x^3}\, dx$$

hajaantuu.

4. Tarkastellaan funktiota $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ kun $x \neq 0$ ja $g(0) = 0$. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^1 g'(x)\,dx?$$

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin funktion g derivaattaa g'. Kun $x \in]0,1]$, niin

$$g'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2},$$

ja pisteessä 0 derivaatta on

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} x \cos \frac{1}{x^2} = 0.$$

Huomataan että

$$\lim_{x \to 0+} g'(x) = \infty,$$

eli derivaatta g' ei ole rajoitettu välillä $[0,1]$, eikä jatkuva pisteessä 0, joten

$$\int_0^1 g'(x)\,dx$$

on epäoleellinen.

Olkoon $0 < c < 1$. Välillä $[c,1]$ derivaatta g' on jatkuva ja rajoitettu (ja integroituva). Funktio g on derivaattafunktion g' eräs integraalifunktio, joten analyysin peruslauseen nojalla on

$$\int_c^1 g'(x)\,dx = g(1) - g(c).$$

Tämän havainnon perusteella epäoleellinen integraali $\int_0^1 g'(x)\,dx$ suppenee, mikäli $\lim_{c \to 0+} g(c)$ on olemassa. Osoitetaan, että funktio g on jatkuva kohdassa 0, mikä todistaa raja-arvon olemassaolon. Olkoon siis $\varepsilon > 0$ ja $|c - 0| = c < \delta = \sqrt{\varepsilon}$. Tällöin

$$|g(c) - g(0)| = c^2 |\cos \frac{1}{c^2}| \leq c^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Siis funktio g on jatkuva kohdassa 0 ja epäoleellinen integraali $\int_0^1 g'(x)\,dx$ suppenee ja

$$\int_0^1 g'(x)\,dx = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 g'(x)\,dx = \lim_{c \to 0+} (g(1) - g(c)) = g(1) - g(0) = g(1).$$

5. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x^2}\, dx?$$

Ratkaisu: Olkoon $0 < c < 1$. Funktio $x \mapsto \sin \frac{1}{x^2}$ on jatkuva, siis integroituva, kaikilla väleillä $[c, 1]$.

Nyt, koska $0 \leq |\sin t| \leq 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin

$$0 \leq |\sin \frac{1}{x^2}| \leq 1$$

kaikilla $x \in [c, 1]$.

Epäoleellinen integraali $\int_0^1 1\, dx$ suppenee, sillä kyseinen integraali on rajoitettu ja integroituva välillä $[0, 1]$, ja

$$\int_0^1 1\, dx = 1.$$

Majoranttiperiaatteen nojalla integraali

$$\int_0^1 |\sin \frac{1}{x^2}|\, dx$$

suppenee, ja tästä seuraa että integraali

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x^2}\, dx$$

suppenee itseisesti, ja siten myös "ei-itseisesti".

6. Oletetaan, että funktion f kolmas derivaatta f''' on jatkuva välillä $]-1, 1[$. Oletetaan, että $x \in]0, 1[$. Sovella osittaisintegrointia edellisten harjoitusten tehtävän 6 tapaan tehtävän tulokseen ja johda yhtälö

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \text{integraali}.$$

(Huom: tulos pätee myös kun $x \in]-1, 0[$.)

Ratkaisu: Viime viikolla jo osoitettiin, että kaikilla $x \in]-1, 1[$ pätee

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x - t) f''(t)\, dt. \tag{1}$$

Koska f''' on jatkuva välillä $]-1, 1[$, niin voimme jälleen osittaisintegroida yhtälössä esiintyvän integraalin. Oletetaan, että $x > 0$ ja merkitään $u(t) = -\frac{1}{2}(x - t)^2$ ja $v(t) = f''(t)$.

Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_0^x u'(t)v(t)\,dt &= \Big/_{\!0}^{x} u(t)v(t) - \int_0^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= \Big/_{\!0}^{x} -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t) - \int_0^x -\frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Näin ollen yhtälö (1) voidaan saattaa muotoon

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)\,dt.$$

Jos $x < 0$, niin päättely toimii samoin kuin viime viikolla.

Esimerkki: Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, on tunnetusti äärettömän monta kertaa derivoituva. Sovelletaan näin ollen tehtävän 6 algoritmia:

$$\begin{aligned}
e^x &= e^0 + xe^0 + \frac{1}{2}x^2 e^0 + \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 e^t\,dt \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 e^t\,dt.
\end{aligned}$$

Tätä prosessia voisi jatkaa niin kauan kuin haluaa. Tällöin päädyttäisiin seuraavanlaiseen yhtälöön

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Kysymys kuuluukin, että onko y.o. summalla oikeasti olemassa jokin konkreettinen arvo? Miten olemme päätyneet äärellisistä summista yhtäkkiä äärettömään summaan? Onko meitä vaan huijattu?