MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 6 / Ratkaisuehdotuksia (RT)
14. - 16.3.2011

1. Oletetaan, että (a_n) ja (b_n) ovat lukujonoja ja, että $a_n \to a$ ja $b_n \to b$ kun $n \to \infty$. Palauta mieleesi, mistä tiedetään, että $ca_n + db_n \to ca + db$ kun $n \to \infty$. (Tässä c ja d ovat reaalilukuja.)

   Ratkaisu. Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt

$$
\begin{aligned}
|(ca_n + db_n) - (ca + db)| &= |ca_n - ca + db_n - db| \overset{\triangle-ey}{\leq} |ca_n - ca| + |db_n - db| \\
&= |c||a_n - a| + |d||b_n - b| \leq M\big(|a_n - a| + |b_n - b|\big),
\end{aligned}
$$

   missä $M = \max\{|c|, |d|, 1\}$. (Tässä täytyy ottaa 1 – tai mikä tahansa nollasta poikkeava luku – mukaan siltä varalta, että $c = d = 0$, sillä M on kohta nimittäjässä..)

   Koska oletuksen mukaan $a_n \longrightarrow a$ ja $b_n \longrightarrow b$, kun $n \longrightarrow \infty$, niin on olemassa (tarpeeksi suuret) luonnolliset luvut n_1 ja n_2 siten, että $|a_n - a| < \epsilon/2M$, kun $n > n_1$ ja $|b_n - b| < \epsilon/2M$, kun $n > n_2$. Valitaan $n_\epsilon = \max\{n_1, n_2\}$, jolloin

$$
|(ca_n + db_n) - (ca + db)| \leq M\big(|a_n - a| + |b_n - b|\big) < M\Big(\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}\Big) = \epsilon,
$$

   kaikilla $n > n_\epsilon$. Siis $ca_n + db_n \longrightarrow ca + db$, kun $n \to \infty$.

2. Oletetaan, että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat. Osoita edellisen tehtävän avulla tarkasti, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(cx_k + dy_k)$ suppenee, ja että

$$
\sum_{k=1}^{\infty}(cx_k + dy_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k + d\sum_{k=1}^{\infty} y_k.
$$

   (Tässä c ja d ovat reaalilukuja.) Vihje: mieti osasummien jonoja!

   Ratkaisu. Merkitään $X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $Y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$. (Oletuksen mukaan X ja Y ovat siis reaalilukuja!) Merkitään näiden sarjojen osasummia $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ja $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Tehtävän oletuksen mukaan $X_n \longrightarrow X$ ja $Y_n \longrightarrow Y$, kun $n \longrightarrow \infty$. Merkitään $S_n = \sum_{k=1}^{n}(cx_k + dy_k)$. Nyt

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n}(cx_k + dy_k) = c\sum_{k=1}^{n} x_k + d\sum_{k=1}^{n} y_k = cX_n + dY_n.
$$

   Oletuksen ja tehtävän 1 nojalla $S_n = cX_n + dY_n \longrightarrow cX + dY$, kun $n \longrightarrow \infty$. Siispä sarja $S = \sum_{k=1}^{\infty}(cx_k + dy_k)$ suppenee ja lisäksi $S = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k + d\sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

3. Suppeneeko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1}?$$

Ratkaisu. (Koska sarja on positiiviterminen, niin majorantti-/minoranttiajattelu kannattaa pitää mielessä!) Huomataan, että sarjan termeissä $x_k = \frac{k^2+1}{k^4+1}$ nimittäjän on kahta astetta suurempi, kuin osoittaja. Näin ollen tehdään "valistunut arvaus", että sarja suppenee (vertaa sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$).

I tapa: Arvioidaan sarjan termejä ylöspäin

$$0 < \frac{k^2+1}{k^4+1} < \frac{k^2+1}{k^4-1} = \frac{k^2+1}{(k^2+1)(k^2-1)} = \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k+1)(k-1)} < \frac{1}{k(k-1)},$$

kun $k = 2, 3, \ldots$

Esimerkin III.1.4 3) (luentomoniste, s.59) mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ suppenee ja lisäksi osasummiksi saadaan $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{k^4+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{k^4+1} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Selvästi positiivitermisen sarjan osasummat muodostavat kasvavan lukujonon. Tässä tapauksessa positiivitermisen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1} =: S$ osasummien jonolla (S_n) on yläraja, joten jono (S_n) ja siten sarja S suppenee.

II tapa: Arvioidaan sarjan termejä ylöspäin

$$0 < \frac{k^2+1}{k^4+1} \leq \frac{k^2+k^2}{k^4} = \frac{2k^2}{k^4} = 2 \cdot \frac{1}{k}^2,$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$

Tiedetään, että yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee (Esimerkki 2.9., s.68) ja että vakiolla kertominen ei vaikuta suppenemiseen, joten $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ suppenee. Koska edellä saatiin $0 < \frac{k^2+1}{k^4+1} \leq 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots,$ niin majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1}$ suppenee.

4. Oletetaan, että $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on lukujono. Onko välttämättä olemassa sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

jonka osasummat ovat $S_1 = a_1, S_2 = a_2, S_3 = a_3, \ldots$

Ratkaisu.

Lasketaan muutama ensimmäinen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ osasumma $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ja oletetaan, että näille toteutuu ehto $S_k = a_k$. Tällöin
$S_1 = a_1 = x_1$, $S_2 = a_2 = x_1 + x_2$, $S_3 = a_3 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_4 = a_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Huomataan, että sarjan termit ovat muotoa $x_1 = a_1$ ja $x_k = a_k - a_{k-1}$, $k = 2, \ldots, 4$. Tämä päättely antaa (ainakin) vihjeen siitä, että todellakin jokainen lukujono määrää sarjan, jonka osasummat ovat kyseisen lukujonon jäsenet. Todistetaan tämä vielä formaalisti.

Olkoon (a_n) lukujono. Merkitään $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ (tässä siis $S_n, x_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$). Nyt $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ ja pätee $S_1 = x_1$ ja $S_n - S_{n-1} = x_n$ kaikilla $n = 2, 3 \ldots$.

Valitaan $S_k = a_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, jolloin

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k = S_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (S_k - S_{k-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$$

on sarja, jonka osasummille pätee $S_n = a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.