MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 4 / Ratkaisuehdotuksia (RT)
14. - 16.2.2011

1. Määritä kaikki funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ integraalifunktiot, kun $f(x) = 0$ kun $0 \leq x \leq 1$ ja $f(x) = x - 1$ kun $1 < x \leq 2$. (Integraalifunktio on funktio, jonka derivaattafunktio tehtävän funktio on.)

   Ratkaisu. Lauseen 5.1 (luentomoniste, s. 17) nojalla riittää löytää yksi funktion f integraalifunktio F_1; kaikki muut integraalifunktiot löytyvät lisäämällä tähän jokin vakio. (Kannattaa katsoa myös luentomonisteen esimerkki 5.8.a), s.18; tehtävän ratkaisu on samankaltainen.)

   Tehtävässä annettu funktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{kun } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

   sillä $1 - 1 = 0$.

   Tehtävän ratkaisu koostuu kahdesta vaiheesta:

   (i) Muodostetaan funktion f kummallekin osalle integraalifunktio. (Tämä on helppoa, koska f on paloittain polynomi.)

   (ii) Paloittain integroimisen jälkeen integraalivakiot pitää vielä sovittaa yhteen siten, että saadaan aikaan hyvinmääritelty funktio.

   (i): Koska funktio f koostuu polynomifunktioista, on sen osien integraalifunktiot helppo muodostaa. Integroimalla paloittain saadaan

$$F_1(x) = \begin{cases} C_1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + C_2, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

   Nyt millä tahansa lukujen C_1 ja C_2 valinnoilla pätee, että $F_1'(x) = f(x)$, kun tyydytään tarkastelemaan välin jompaa kumpaa puolikasta. Kohta $x = 1$ on ongelmallinen, sillä mielivaltaisilla integroimisvakioiden valinnoilla ei funktio F_1 välttämättä ole hyvin määritelty kohdassa $x = 1$.

   (ii): Jotta kuvauksesta saadaan F_1 hyvinmääritelty, pitää vakiot C_1 ja C_2 valita siten, että vasemman ja oikean puolen funktiot saavat kohdassa $x = 1$ saman arvon, eli täytyy päteä

$$\left(F_1^{\text{vas}}(1) = C_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 + C_2 = F_1^{\text{oik}}(1) \right) \Leftrightarrow \left(C_2 = C_1 + \frac{1}{2} \right).$$

   Kuten aiemmin todettiin, tehtävän ratkaisemiseksi täytyy löytää vain yksi integraalifunktio. Siispä vakio C_1 voidaan tässä valita mielivaltaisesti - yksinkertaisin valinta tuottaa yleensä ”kauneimman” funktion. Olkoon siis $C_1 = 0$. Nyt

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Funktio F_1 on derivoituva väleillä $[0,1]$ ja $[1,2]$, joissa derivaattafunktiolle pätee $F_1'(x) = f(x)$. Aiemman tarkastelun perusteella nämä arvot yhtyvät kohdassa $x = 1$.

Nyt tiedetäänkin kaikki funktion f integraalifunktiot F; ne ovat muotoa

$$F(x) = F_1(x) + C, \text{ missä } C \in \mathbb{R}.$$

2. Tarkastellaan funktiota $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$ kun $x \neq 1$ ja $f(1) = 3$.
   (a) Onko f Riemann-integroituva?
   (b) Onko funktiolla f integraalifunktioita?
   (Tässä saa käyttää tietoa, ettei derivaattafunktiolla voi olla "hyppykohtia". Muistatko, miten moinen ominaisuus perustellaan?)

   Tarkastellaan funktiota $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ kun $x \neq 0$ ja $g(0) = 0$.
   (c) Onko g derivoituva?
   (d) Onko g' Riemann-integroituva?

Ratkaisu.

(a) Osoitetaan, että funktio f on Riemann-integroituva Riemannin ehdon avulla. Muodostetaan jako $D_n = \{0, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2\}$, jolloin jakoväleinä ovat $\Delta_0 = [0, 1 - \frac{1}{n}]$, $\Delta_1 = [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ ja $\Delta_2 = [1 + \frac{1}{n}, 2]$. Nyt

$$\begin{aligned} &S_{D_n} - s_{D_n} = \sum_{k=0}^{2} (G_k - g_k) l(\Delta_k) \\ &= (G_0 - g_0)(1 - \frac{1}{n} - 0) + (G_1 - g_1)(1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}) + (G_2 - g_2)(2 - 1 + \frac{1}{n}) \\ &= 0 + 3 \cdot 2\frac{1}{n} + 0 = \frac{6}{n}, \end{aligned}$$

eli ylä- ja alasumman erotus saadaan pienemmäksi kuin mielivaltainen $\varepsilon > 0$, kunhan $n > \frac{6}{\varepsilon}$. Täten funktio f on Riemann-integroituva.

(b) Jos olisi olemassa derivoituva funktio F siten, että $F' = f$, niin kaikilla välin $[0,2]$ pisteillä x toteutuisi $F'(x) = f(x)$. Erityisesti täytyisi päteä $F'(1) = f(1)$. Mutta

$$\begin{aligned} F'(1) &= \lim_{x \to 1-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \overset{*}{=} \lim_{x \to 1-} \frac{F'(\xi_x)(x-1)}{x-1} \\ &\overset{**}{=} \lim_{x \to 1-} f(\xi_x) \overset{***}{=} \lim_{x \to 1-} 0 \\ &= 0 \neq 3 = f(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Selitykset:
* Differentiaalilaskennan väliarvolause, jollain $\xi_x \in]x, 1[$

** $F' = f$

*** $\xi_x \in]x, 1[$, joten $f(\xi_x) = 0$.

Tällöin siis $F'(1) \neq f(1)$, joten F ei voi olla funktion f integraalifunktio.

Tämä on esimerkki *funktiosta, joka on Riemann-integroituva mutta jolla ei silti ole integraalifunktiota.*

(c) Muissa pisteissä kuin origossa funktio g on muotoa

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ja näissä pisteissä se on derivoituva, derivaattafunktiona

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}(-2) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Osoitetaan, että funktio g on derivoituva myös kohdassa $x = 0$ tutkimalla erotusosamäärän raja-arvoa:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\in[-1,1]} = 0.$$

Funktio g on siis derivoituva koko välillä $[0, 2]$.

(d) Osoitetaan, ettei funktio g' ole Riemann-integroituva näyttämällä, että se ei ole rajoitettu. Tutkitaan pisteitä

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}},\ n \in \mathbb{N}.$$

(Huomaa, että pisteet x_n sijaitsevat välillä $(0, 1)$ ja luvun n kasvaessa lähestyvät origoa.) Kun n on pariton saa funktio g' arvoja

$$g'(x_n) = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 2\sqrt{n\pi}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=-1} = 2\sqrt{n\pi} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Siis, valitsemalla pariton luku $n > \frac{M^2}{4\pi}$, löydetään piste, jossa g' saa mielivaltaista lukua M suuremman arvon. Rajoittamattomana funktiona g' ei ole Riemann-integroituva.

Kohdissa (a) ja (b) nähtiin esimerkki funktiosta, joka on Riemann-integroituva, mutta jolla ei ole integraalifunktiota. Kohdissa (c)- ja (d) puolestaan on funktio g', *jolla on integraalifunktio* g, *mutta joka ei silti ole Riemann-integroituva.*

3. Tutustu lauseen 4.11 (s.12) todistamiseen seuraavan esimerkin valossa. Oletetaan, että $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 2]$ ja $f(1) > 0$. Osoita, että
$$\int_0^2 f(x)\,dx > 0.$$

Tarkoitus on siis toimia kuten lauseen 4.11 todistuksessa. Osaatko esittää lauseen 4.11 seurauksena tälle tulokselle (ja siis monisteen seurauslauseelle 4.12)?

Ratkaisu: Koska kuvaus f on jatkuva määrittelyvälillään $[0,2]$, niin se on jatkuva erityisesti pisteessä $x=1$. Jatkuvuuden perusteella mielivaltaisella $\varepsilon>0$ on olemassa $\delta\in]0,1[$ siten, että $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ aina kun $|x-1|<\delta$. Voidaan siis valita $\varepsilon=\frac{f(1)}{2}$.
Tällöin on olemassa $\delta>0$ siten, että

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)|<\frac{f(1)}{2} &\iff f(1)-\frac{f(1)}{2}<f(x)<f(1)+\frac{f(1)}{2}\\ &\iff \frac{1}{2}f(1)<f(x)<\frac{3}{2}f(1),\end{aligned}$$

kun $|x-1|<\delta$.

Erityisesti tästä seuraa, että $f(x)\geq\frac{f(1)}{2}$, kun $x\in[1-\delta,1+\delta]$.
Nyt

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^{1-\delta}\underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx+\int_{1-\delta}^{1+\delta}\underbrace{f(x)}_{\geq\frac{f(1)}{2}}\,dx+\int_{1+\delta}^{2}\underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx\\ &\geq 0+\int_{1-\delta}^{1+\delta}\frac{f(1)}{2}x+0\\ &= (1+\delta-(1-\delta))\cdot\frac{f(1)}{2}\\ &= \delta\cdot f(1)>0.\end{aligned}$$

Jos riittää tarkastella välin $[0,2]$ tapahtumia, niin lause 4.11 saadaan tämän seurauksena soveltamalla tulosta kuvaukseen $f-g$. Tilanteessa, jossa positiivinen funktio f on määritelty mielivaltaisella välillä $[a,b]$ ja jossa se saa aidosti positiivisen arvon jossain pisteessä $y\in[a,b]$, voidaan äskeinen päättely toistaa lähes identtisesti; kirjoitetaan vain lukujen 0, 1 ja 2 paikalle symbolit a, y ja b.

4. Osoita, että funktio $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva, jos kaikilla x pätee $f(x)=\sqrt[17]{x}$.

Ratkaisu:

Ratkaisu mukailee luennoilla torstaina 10.2. esitettyä esimerkkiä. (Mikäli et ollut luennolla, katso esimerkki Moodle-sivustolle skannatuista luentomuistiinpanoista!)

Kerrataan tasaisen jatkuvuuden määritelmä (luentomoniste, s.6):

Määritelmä. *Funktio $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva A:ssa, jos kaikkia $\epsilon>0$ kohti on olemassa $\delta_\epsilon>0$ siten, että*

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon,\ \text{aina kun } |x-y|<\delta_\epsilon.$$

(Tässä δ_ϵ ei saa riippua pisteiden x, y paikasta.)

Johdattelua todistuksen rakentamiseen.
On siis osoitettava, että funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[17]{x}$, on *tasaisesti jatkuva* koko $\mathbb{R}$:ssa. Selvästi funktio f on *jatkuva* koko $\mathbb{R}$:ssa. Funktion f derivaataksi saadaan

$$f'(x) = \frac{1}{17}x^{-\frac{16}{17}} = \frac{1}{17}\frac{1}{\sqrt[17]{x^{16}}},$$

joten derivaattafunktio on rajoitettu origon ulkopuolella. Tarkastellaan erikseen funktiota (i) origon sisältävällä (suljetulla) välillä sekä (ii) puoliavoimilla (rajoittamattomilla) väleillä, jotka eivät sisällä origoa.

(i): Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan luku α siten, että $0 < \alpha < \frac{\epsilon}{2}$. Kun $x \in [-\alpha^{17}, \alpha^{17}]$, niin $f(x) = \sqrt[17]{x} \in [-\alpha, \alpha]$. Siispä

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\alpha < \epsilon, \text{ aina kun } x, y \in [-\alpha^{17}, \alpha^{17}] =: \Delta_\alpha.$$

Siten, valitsemalla $\delta_1 = 2\alpha^{17}$, on funktion f tasainen jatkuvuus saatu osoitettua tapauksessa, jossa $x, y \in \Delta_\alpha$.

(Tässä voisi tietysti vedota myös lauseeseen I.3.5., jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.)

(ii): Olkoon $\epsilon > 0$. Tarkastellaan välejä $(-\infty, -\frac{\alpha^{17}}{2}] =: \Delta_-$ ja $[\frac{\alpha^{17}}{2}, \infty) =: \Delta_+$, missä jälleen α on sama kuin kohdassa (i) valittiin. Näillä väleillä funktion f derivaatta on rajoitettu, siis kaikilla $x \in \Delta_- \cup \Delta_+$ pätee $|f'(x)| \leq M$ jollain vakiolla $M < \infty$. Väliarvolauseen nojalla (ks. esim. väliarvoepäyhtälö 8.4. syksyn monisteesta, s.56):

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x| < \epsilon$$

aina kun $|x - y| < \frac{\epsilon}{M}$. Nyt voidaan valita $\frac{\epsilon}{M} =: \delta_2$ ja tasaisen jatkuvuuden ehto täyttyy funktiolle f, kun $x, y \in \Delta_- \cup \Delta_+$.

”Varsinainen” todistus seuraa nyt edellä olevista tarkasteluista:

Valitaan $\delta_\epsilon = min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\alpha^{17}}{2}\}$. Tällöin kaikille $x, y \in \mathbb{R}$, joille $|x - y| < \delta_\epsilon$, pätee yllä tarkastelluista tilanteista joko (i) tai (ii), mikä osoittaa funktion $f(x) = \sqrt[17]{x}$ tasaisen jatkuvuuden koko $\mathbb{R}$:ssa. (Huomaa, että $\mathbb{R} = \Delta_\alpha \cup \Delta_- \cup \Delta_+$.)

Perustelu:
Jos $x \in \Delta_\alpha$ ja $y \in \Delta_-$, niin lisäksi välttämättä joko $y \in \Delta_- \cap \Delta_\alpha$ tai $x \in \Delta_\alpha \cap \Delta_-$ (tai molemmat $x, y \in \Delta_- \cap \Delta_\alpha$). Tämä seuraa suoraan luvun δ_ϵ valinnasta, sillä nyt $\delta_\epsilon \leq \frac{\alpha^{17}}{2}$. (Piirrä kuva tilanteesta!) Sama päättely tietysti toimii tilanteessa $x \in \Delta_\alpha$ ja $y \in \Delta_+$. Huomaa, että koska $|x - y| < \delta_\epsilon \leq \frac{\alpha^{17}}{2}$, niin tilannetta $x \in \Delta_-$ ja $y \in \Delta_+$ ei pääse syntymään.