MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 10 / Ratkaisuehdotuksia (RT)
11. - 13.4.2011

1. Suppeneeko geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ tasaisesti välillä $]-1,0[$?
Vihje: huomaa, että osasumman ja koko sarjan summan erotusta voi käsitellä geometrisen sarjan summakaavan avulla.

Ratkaisu: Luentomonisteen esimerkin IV.3.2 (s. 83) nojalla tehtävän sarja suppenee *pisteittäin* välillä $]-1,1[$ ja sarjan summaksi saadaan (geometrisen sarjan summakaavalla, joka löytyy mm. MAOL-taulukoista)

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ kaikilla } x \in]-1,1[.$$

Tämä tarkoittaa määritelmän mukaan sitä, että sarjan osasummien

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x},\ n = 1,2,\dots,$$

muodostama jono (S_n) suppenee (pisteittäin) kohti funktiota S. (Tässä käytettiin geometrisen sarjan osasummien summakaavaa, läytyy niin ikään vaikkapa MAOL-taulukoista[1].) Monisteen esimerkissä osoitetaan, että suppeneminen on tasaista jokaisella suppenemisvälin $]-1,1[$ *suljetulla osavälillä*, siis jokaisella välillä $[-a,a]$, missä $0 < a < 1$. Osoitetaan, että suppeneminen *ei ole tasaista* välillä $]-1,0[$:

Tasaisen suppenemisen määritelmän mukaan sarjan suppeneminen on tasaista välillä $]-1,0[$, jos osasummien muodostaman jonon (S_n) suppeneminen on tasaista välillä $]-1,0[$. Tehdään **antiteesi eli vastaoletus:** sarja suppenee tasaisesti välillä $]-1,0[$ eli $S_n \to S$ tasaisesti välillä $]-1,0[$.

Funktiojonon tasaisen suppenemisen määritelmän ja vastaoletuksen nojalla (esimerkiksi) epsilonin arvoa[2] $\varepsilon = 1/6$ kohti on olemassa sellainen luku $K \in \mathbb{N}$, että jokaisella $n > K$ ja *jokaisella* $x \in]-1,0[$ pätee

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{6}.$$

Halutaan löytää piste $x \in]-1,0[$, joka rikkoo tasaisen suppenemisen ehdon. Huomataan, että

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{-x^n}{1-x}\right| = \frac{|x|^n}{1-x} \overset{(*)}{>} \frac{|x|^n}{2} > \frac{1}{6},$$

jos

$$|x| > \sqrt[n]{\frac{1}{3}}.$$

[1]Tässä esiintyy hieman toisistaan poikkeavia merkintöjä. Tehtävässä (samoin kuin monisteessa, s. 58) geometrisen sarjan termien indeksöinti aloitetaan arvosta $k = 0$. Osasummien S_n indeksöinti sitä vastoin aloitetaan arvosta $n = 1$. Siis ensimmäinen osasumma S_1 on sarjan ensimmäinen termi eli $x^0 = 1$. Yleinen osasumma S_n on n:n ensimmäisen termin summa, siis termiin x^{n-1} saakka.

[2]Tässä valitaan arvo $1/6$. Toki moni muukin valinta johtaisi haluttuun ristiriitaan.

Kohdassa $(*)$ käytettiin seuraavaa arviota: Koska $-1 < x < 0$, niin $0 < -x < 1$ ja edelleen $1 < 1 - x < 2$. Siispä $\frac{1}{1-x} > \frac{1}{2}$.

Tutkitaankin pistettä $x = -1/\sqrt[n]{2} \in]-1, 0[$. Huomataan, että tällä muuttujan arvolla x on kuitenkin voimassa, että

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{-x^n}{1-x}\right| = \frac{|x|^n}{1-x} > \frac{|x|^n}{2} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{6}.$$

Tämä on ristiriita. Suppeneminen ei siis ole tasaista välillä $]-1, 0[$.

2. Esitä

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

potenssisarjan summana ja päättele tästä arvot

$$f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0).$$

Ratkaisu:
Kun $|-x^3| < 1$, siis $x \in]-1, 1[$, voidaan funktio f kirjoittaa (suppenevan) geometrisen sarjan summana

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^3)^k = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots .$$

Nähdään, että välillä $]-1, 1[$ funktion f lauseke voidaan kirjoittaa myös potenssisarjan (kehityskeskuksena $x_0 = 0$) summana

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

missä $a_0 = 1$ ja $a_k = \begin{cases} -1, \text{ kun } k = 3n, \text{ missä } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ on pariton} \\ 1, \text{ kun } k = 3n, \text{ missä } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ on parillinen} \\ 0, \text{ kun } k \text{ ei ole jaollinen 3:lla.} \end{cases}$

Koska yo. potenssisarjan suppenemissäde $R = 1 > 0$, voidaan käyttää luentomonisteen lausetta V.2.5 (s.97). Joko ko. lausetta käyttämällä tai suoraan funktioon sijoittamalla muuttujan paikalle 0 nähdään, että $f(0) = a_0 = 1$. Lisäksi $f^{(n)}(0) = n!a_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Nyt $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$, joten

$$f'(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 0.$$

Toisaalta $a_3 = -1$ ja $a_6 = 1$, joten

$$f^{(3)}(0) = 3! \cdot (-1) = -6 \text{ ja } f^{(6)}(0) = 6! \cdot 1 = 720.$$

3. Oletetaan, että $(b_0, b_1, \ldots)$ on rajoitettu lukujono. Onko välttämättä olemassa sellaista funktiota f, jolle kaikilla k pätee, että $f^{(k)}(7) = b_k$?

Ratkaisu: Kyllä on. Tutkitaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-7)^k, \tag{1}$$

missä kertoimet ovat $a_k = b_k/k!$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja kehityskeskus on $x_0 = 7$. Lukujono (b_k) on rajoitettu, joten on olemassa sellainen luku $0 \le M < \infty$, että

$$|b_k| \le M \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{N}.$$

Tästä seuraa, että potenssisarjan (1) kertoimille pätee

$$|a_k| = \left|\frac{b_k}{k!}\right| \le |b_k| \le M \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{N}.$$

Sarjan (1) suppenemissäteelle R on tämän nojalla voimassa, että $R \ge 1$ (Lause 1.7. s. 93).

Sarja (1) määrää suppenemisvälillään $]7-R, 7+R[$ funktion $f\colon\,]7-R, 7+R[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-7)^k.$$

Funktiolla f on välillä $]7-R, 7+R[$ kaikkien kertalukujen derivaatat (Lause 2.5. s. 97). Erityisesti derivaatat ovat olemassa pisteessä $x = 7$ ja jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$f^{(k)}(7) = k!a_k = k!\frac{b_k}{k!} = b_k.$$

4. Onko sarjojen $\sum a_k(x-x_0)^k$ ja $\sum |a_k|(x-x_0)^k$ suppenemissäteillä yhteyttä?

Ratkaisu: Osoitetaan Abelin lauseen (Lause V.1.1. s. 91) avulla, että tehtävän sarjojen suppenemissäteet ovat itse asiassa samat.

Oletetaan, että potenssisarjan

$$P_1(x) = \sum |a_k|(x-x_0)^k$$

suppenemissäde on $R_1 > 0$, ja olkoon sarjan

$$P_2(x) = \sum a_k(x-x_0)^k$$

suppenemissäde R_2. Tavoitteemme on osoittaa, että $R_1 = R_2$.

Oletetaan, että sarja $P_1(x)$ suppenee pisteessä $x_1 \in \mathbb{R}$ ja että $|x_1 - x_0| < R_1$ (eli piste x_1 on sarjan suppenemisvälillä). Tällöin on olemassa[3] suppenemisvälin piste x_2, jolle pätee että $|x_2 - x_0| > |x_1 - x_0|$. Sarja $P_1(x)$ siis suppenee pisteessä x_2. Abelin lauseen nojalla sarja $P_1(x)$ suppenee *itseisesti* jokaisessa pisteessä x, joka toteuttaa ehdon $|x-x_0| < |x_2 - x_0|$. Siis, sarja

$$\sum \big||a_k|(x-x_0)^k\big| = \sum |a_k(x-x_0)^k|$$

[3] Pisteen x_2 olemassaolo seuraa siitä, että suppenemisväli on avoin reaaliväli.

suppenee erityisesti valitussa pisteessä x_1. Tämä tarkoittaa sitä, että sarja $P_2(x)$ suppenee itseisesti pisteessä x_1, joten se suppenee. Sarjan $P_2(x)$ suppenemissäteelle R_2 on näin voimassa $|x_1 - x_0| \leq R_2$. Tämä pätee kaikilla sellaisilla pisteillä x, joissa sarja $P_1(x)$ suppenee, joten

$$R_1 = \sup\{|x - x_0|\colon \text{sarja } \sum |a_k|(x - x_0)^k \text{ suppenee pisteessä } x\} \leq R_2 \ .$$

Oletetaan sitten, että sarja $P_2(x)$ suppenee pisteessä $x_1 \in \mathbb{R}$ ja että $|x_1 - x_0| < R_2$ (eli piste x_1 on sarjan suppenemisvälillä). Tällöin on olemassa[4] suppenemisvälin piste x_2, jolle pätee että $|x_2 - x_0| > |x_1 - x_0|$. Sarja $P_2(x)$ siis suppenee pisteessä x_2. Abelin lauseen nojalla sarja $P_2(x)$ suppenee *itseisesti* jokaisessa pisteessä x, joka toteuttaa ehdon $|x - x_0| < |x_2 - x_0|$. Sarja $P_2(x)$ suppenee itseisesti siis erityisesti valitussa pisteessä x_1. Tällöin myös sarja $P_1(x)$ suppenee itseisesti pisteessä x_1 ja siis suppenee. Sarjan $P_1(x)$ suppenemissäteelle R_1 on näin voimassa $|x_1 - x_0| \leq R_1$. Tämä pätee kaikilla sellaisilla pisteillä x, joissa sarja $P_2(x)$ suppenee, joten

$$R_2 = \sup\{|x - x_0|\colon \text{sarja } \sum a_k(x - x_0)^k \text{ suppenee pisteessä } x\} \leq R_1 \ .$$

Yhdistämällä saadut tulokset todetaan, että $R_1 = R_2$.

[4]Pisteen x_2 olemassaolo seuraa siitä, että suppenemisväli on avoin reaaliväli.