MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 1 / Ratkaisuehdotuksia (RT)
24. - 26.1.2011

1. Laske
$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\sin(x^2)\,dx.$$
Tunnista yhdistetyn funktion derivaatta.

*Johdattelua ratkaisun löytämiseen.* Pyritään ilmaisemaan integroitava funktio $x\sin(x^2)$ yhdistetyn funktion derivaattana, toisin sanoen muodossa
$$x\sin(x^2) = (g\circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)),$$
jossa $f\colon [\sqrt{\pi/4}, \sqrt{\pi/3}] \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia (itse asiassa funktion $g$ derivoituvuus sisäfunktion arvojoukossa riittää). Selvästi sisäfunktion $f$ täytyy olla muotoa $f(x) = x^2$ kaikilla $x \in [\sqrt{\pi/4}, \sqrt{\pi/3}]$, joten $f'(x) = 2x$ kaikilla $x \in [\pi/4, \pi/3]$. Jos asetetaan $g'(x) = (1/2)\sin x$, jonka integraalifunktioksi $g$ voidaan valita $g(x) = -(1/2)\cos x$, niin saadaan integroitava funktio haluttuun muotoon:
$$D\Big(-\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big) = 2x\cdot\frac{1}{2}\sin(x^2) = (g\circ f)'(x) = x\sin(x^2)$$
kaikilla $x \in [\sqrt{\pi/4}, \sqrt{\pi/3}]$.

*Ratkaisu.* Analyysin peruslauseen (Lause 5.6, s.18) nojalla
$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/3}} x\sin(x^2)\,dx &= \int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/3}} D\Big(-\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big)\,dx = \Big/_{\!\!\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/3}} -\frac{1}{2}\cos(x^2)\\ &= -\frac{1}{2}\big(\cos(\pi/3) - \cos(\pi/4)\big) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{4}.\end{aligned}$$

2. Laske
$$\int_0^1 e^x e^{e^x}\,dx.$$
Tunnista yhdistetyn funktion derivaatta. Tässä $e^{e^x} = e^{(e^x)}$.

*Ratkaisu.* Samaan tapaan kuin tehtävässä 1, pyritään ilmaisemaan integroitava funktio $e^x e^{e^x}$ derivaattana yhdistetystä funktiosta $f\circ g$ sopivilla jatkuvasti derivoituvilla funktioilla $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (jälleen funktion $g$ derivoituvuus funktion $f$ arvojoukossa riittää). Huomataan, että
$$e^x e^{(e^x)} = f'(x)g'(f(x)) = (g\circ f)'(x),$$

kun valitaan $f(x) = g(x) = e^x$, sillä $D(e^x) = e^x$. Analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x e^{(e^x)}\,dx &= \int_0^1 D(e^{(e^x)})\,dx = \Big/_{0}^{1} e^{(e^x)} = e^{e^1} - e^{e^0}\\ &= e^e - e.\end{aligned}$$

3. Laske

$$(1)\ \int_1^2 x^2 e^x\,dx;$$

$$(2)\ \int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx.$$

Osittaisintegrointi auttaa.

*Johdattelua ratkaisun löytämiseen.* Kohdissa (1) ja (2) olevaa integroitavaa funktiota ei voida ilmaista (pelkkänä) yhdistetyn funktion derivaattana. Kuten vihje kuuluu, käytetään osittaisintegrointilausetta (s.23):

*Olkoot $u, v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivoituvia ja $u', v'$ integroituvia välillä $[a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} u(x)v(x) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx,$$

*Kohdan (1) ratkaisu.* Tässä kannattaa aluksi valita $u(x) = x^2$ ja $v(x) = e^x$, sillä osittaisintegroimalla kahdesti päästään $x$:n potensseista eroon ja viimeiseksi integroitavaksi jää enää $2e^x$. Merkitään siis

$$\begin{aligned}u(x) &= x^2, \quad u'(x) = 2x\\ v(x) &= e^x, \quad v'(x) = e^x\end{aligned}$$

kaikilla $x \in [1,2]$, jolloin

$$\int_1^2 x^2 e^x\,dx = \Big/_{1}^{2} x^2 e^x - \int_1^2 2xe^x\,dx = (4e^2 - e) - \int_1^2 2xe^x\,dx.$$

Osittaisintegroidaan jäljelle jäänyt integraali (nyt $u(x) = 2x$ ja $v'(x) = e^x$):

$$\begin{aligned}\int_1^2 2xe^x\,dx &= \Big/_{1}^{2} 2xe^x - \int_1^2 2e^x\,dx = 4e^2 - 2e - \Big/_{1}^{2} 2e^x\\ &= 4e^2 - 2e - (2e^2 - 2e) = 2e^2.\end{aligned}$$

Näin tehtävän vastaukseksi saadaan

$$\int_1^2 x^2 e^x \, dx = 4e^2 - e - 2e^2 = 2e^2 - e.$$

*Kohdan (2) ratkaisu.* Tässä täytyy huomata, että integroitava funktio $x^3 e^{x^2}$ voidaan kirjoittaa funktioiden $\frac{1}{2}x^2$ ja $2xe^{x^2}$ tulona, joista jälkimmäinen on yhdistetyn funktion $e^{x^2}$ derivaatta. Merkitään siis

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad u'(x) = x,$$
$$v'(x) = 2xe^{x^2}, \quad v(x) = e^{x^2}$$

kaikilla $x \in [1, 2]$, jolloin osittaisintegroimalla

$$\int_1^2 x^3 e^{x^2} \, dx = \Big/_{1}^{2} \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int_1^2 xe^{x^2} \, dx = 2e^4 - \frac{1}{2}e - \int_1^2 xe^{x^2} \, dx.$$

Koska $D\Big(\frac{1}{2}e^{x^2}\Big) = xe^{x^2}$ kaikilla $x \in [1, 2]$, niin Analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_1^2 xe^{x^2} \, dx = \Big/_{1}^{2} \frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

Näin ollen

$$\int_1^2 x^3 e^{x^2} \, dx = \frac{3}{2}e^4.$$

4. Laske sijoituksella $e^x = u$

$$\int_0^1 e^x e^{e^x} \, dx.$$

*Vastauksen tarkastamisen kannalta kannattaa huomata, että kyseessä on täsmälleen sama integraali, kuin tehtävässä 2, joten myös vastauksen täytyy olla sama.*

*Johdattelua ratkaisun löytämiseen.*

Sovelletaan luentomonisteen lausetta (Huom. 6.4, kohta (2), s.22), jonka mukaan (sijoituksella $\psi(x) = u$) :

$$\int_a^b g(\psi(x))\psi^{'}(x) \, dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(u) \, du.$$

Asetetaan $\psi \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = e^x$, jolloin $\psi([0, 1]) \subset [1, e]$ ja $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = e$. Määritellään lisäksi $g \colon [1, e] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$, jolloin yllä olevan yhtälön mukaan

$$\int_0^1 e^x e^{e^x}\,dx = \int_0^1 \psi^{'}(x)g(\psi(x))\,dx = \int_1^e g(u)\,du = \int_1^e e^u\,du.$$

*Ratkaisu.* Kirjoitetaan kuitenkin ratkaisu vielä, kuten luentomonisteen esimerkissä 6.5 (s.22).

Määritellään sijoitus $e^x = u$, jolloin uusiksi integroimisrajoiksi saadaan

$$x = 0 \Longrightarrow u = e^0 = 1,$$

$$x = 1 \Longrightarrow u = e^1 = e.$$

Nyt lisäksi $e^x\,dx = du$ (tämä "yhtälö" on lähinnä kätevä muistisääntö sijoituksen tekemisen helpottamiseksi, kuten luennoillakin on korostettu. Täsmällinen matemaattinen perustelu muuttujan vaihdolle tapahtuu Lauseen 6.3 (s.21) tai Huomautuksen 6.4 (s.22) avulla). Siispä

$$\int_0^1 e^x e^{e^x}\,dx = \int_1^e e^u\,du = \Big/_{\!1}^{\,e} e^u = e^e - e.$$