MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 9
4.4.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia: Aapo Tevanlinna

Funktioterminen sarja P,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

missä $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, on *potenssisarja*, jonka *kertoimet* ovat luvut $a_0, a_1, \ldots$ ja *kehityskeskus* on x_0. Näissä ohjauksissa perehdytään kysymyksiin, millaisessa alueessa kyseessä oleva sarjan $P(x)$ arvo on olemassa, ja miten kerroinjono (a_k) vaikuttaa potenssisarjan käyttäytymiseen.

1. Luennolla on käsitelty sitä, mitä tiedetään sellaisen potenssisarjan suppenemisesta, jonka suppenemissäde R on positiivinen reaaliluku. Osoita samaan tapaan, että potenssisarja suppenee koko reaalilukujen joukossa, jos $R = \infty$.

Ratkaisu: Potenssisarjan P suppenemissäde R on täsmällisesti määritelty seuraavasti (vrt. s.92 yläosa):

$$R = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ suppenee}\}.$$

Merkittävä asia tässä määritelmässä huomattavaksi on, että R kuvaa itse asiassa pisteen x suurinta mahdollisinta etäisyyttä kehityskeskuksesta x_0, millä $P(x)$ suppenee.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan, että $P(x)$ suppenee:

Koska suppenemissäde $R = \infty$, niin joukko $\{|x-x_0| : P(x) \text{ suppenee}\}$ on rajoittamaton ja silloin on olemassa sellainen $x_1 \in \mathbb{R}$, jolle $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ ja potenssisarja $P(x_1)$ suppenee. Abelin lauseen (Lause V.1.1) a)-kohdan nojalla potenssisarja P suppenee itseisesti pisteessä x, joten se suppenee myös tavallisessa mielessä.

Koska piste x oli vapaasti valittu, niin olemme osoittaneet, että $P(x)$ suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2. Oletetaan, että potenssisarja $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenee kohdassa $x_1 \in \mathbb{R}$ ja hajaantuu kohdassa $x_2 \in \mathbb{R}$, missä $|x_1 - x_0| = |x_2 - x_0|$. Mikä on tällöin potenssisarjan suppenemissäde?

Ratkaisu: Käytetään jälleen Abelin lausetta kuten tehtävässä 1.

Koska Abelin lauseen nojalla potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenee itseisesti jokaisella $x \in \mathbb{R}$, jolla $|x-x_0| < |x_1-x_0|$, niin voimme päätellä, että suppenemissäteelle pätee

$$R = \sup\{|x-x_0| : P(x) \text{ suppenee}\} \geq |x_1-x_0|.$$

Osoitetaan seuraavaksi y.o. epäyhtälö toiseen suuntaan, eli että ei ole olemassa pistettä $x \in \mathbb{R}$, jolle

$$|x-x_0| > |x_2-x_0| \text{ ja potenssisarja } P(x) \text{ suppenee.} \tag{$*$}$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$, jolle ehdot $(*)$ pätevät. Abelin lauseesta saadaan, että potenssisarja $P(t)$ suppenee itseisesti jokaisella $t \in \mathbb{R}$, jolle $|t-x_0| < |x-x_0|$. Erityisesti tällöin $P(x_2)$ suppenee itseisesti. Tämä on ristiriita, sillä oletuksien mukaan potenssisarja $P(x_2)$ hajaantuu. Suppenemissäteelle täytyy siis päteä $R \leq |x_2-x_0|$.

Koska siis $|x_1-x_0| \leq R \leq |x_2-x_0| = |x_1-x_0|$, niin $R = |x_1-x_0|$.

3. Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenemissäde on 1. Mikä on potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{7^k}(x-x_0)^k$$

suppenemissäde?

Ratkaisu: Merkitään $y = (x-x_0)/7$. Tällä merkinnällä on

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{7^k}(x-x_0)^k.$$

Oletuksien mukaan potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ suppenee, kun $|y| < 1$ ja hajaantuu, kun $|y| > 1$. Näin ollen tehtävän potenssisarja suppenee, kun $|x-x_0| < 7$ ja hajaantuu, kun $|x-x_0| > 7$, ja kysytty suppenemissäde on siis 7.

Huomautus: Tutkittaessa potenssisarjan suppenemissädettä on huomattava, että kerroinjono (a_k) *on se, joka määrää sen. Suppenemissäde ei riipu mitenkään kehityskeskuksesta* x_0*, joten merkinnällä* $y = (x-x_0)/7$ *saa yksinkertaistettua ulkoasua.*

4. Monisteessa on lause, joka karakterisoi ehdot $R \geq 1$, $R \leq 1$ ja $R = 1$. Yritä muotoilla edellisen tehtävän antaman vihjeen perusteella vastaava lause, joka karakterisoi ehdot $R \geq 7$, $R \leq 7$ ja $R = 7$.

Muotoillaan lause ja todistetaan se:
Lause: Olkoon $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ potenssisarja. Potenssisarjan P suppenemissäteelle R pätee:

1. Jos on olemassa sellainen $M < \infty$, että $|a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $R \geq 7$.
2. Jos on olemassa sellainen $m > 0$, että $|a_k| \geq m/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $R \geq 7$.
3. Jos on olemassa sellainet $M < \infty$ ja $m > 0$, joille $m/7^k \leq |a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $R = 7$.

Väitteen 1 **todistus:** Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $M < \infty$ sellaiset, että $|x - x_0| < 7$ ja $|a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$0 \leq |a_k(x - x_0)^k| = |a_k||x - x_0|^k \leq \frac{M}{7^k}|(x - x_0)|^k = M\left|\frac{x - x_0}{7}\right|^k.$$

Koska $|x - x_0| < 7$, niin geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} M|\frac{x-x_0}{7}|^k$ suppenee, joten majoranttiperiaatteen nojalla potenssisarja $P(x)$ suppenee itseisesti ja siis myös tavallisessa mielessä. Täten potenssisarja $P(x)$ suppenee ainakin alueessa $]x_0 - 7, x_0 + 7[$, joten $R \geq 7$.

Väitteen 2 **todistus:** Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $m > 0$ sellaiset, että $|x - x_0| = 7$ ja $|a_k| \geq m/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k||x - x_0|^k \geq \frac{m}{7^k}|(x - x_0)|^k = m\left|\frac{x - x_0}{7}\right|^k = m > 0.$$

Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x - x_0)^k|$ minorantti $\sum_{k=0}^{\infty} m$ hajaantuu, joten $P(x)$ ei suppene itseisesti. Abelin lauseen nojalla $P(x)$ hajaantuu, kun $|x - x_0| > 7$. Näin ollen on oltava, että $R \leq 7$.

Väitteen 3 **todistus:** Olkoon $M < \infty$ ja $m > 0$ sellaiset, että $m/7^k \leq |a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Nyt kohtien (1) ja (2) oletukset ovat voimassa, joten saamme $7 \leq R \leq 7$ eli $R = 7$.