MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 2, ratkaisuehdotuksia
Aapo Tevanlinna
31 . 1. 2011 alkavalle viikolle

1. Oletetaan, että $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu. Oletetaan, että $a < c < d < b$. Osoita, että

$$\sup\{f(x) \mid c \le x \le d\} \le \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}.$$

Ratkaisu: Palautetaan mieleen, että joukon $E \subset \mathbb{R}$ *pienin yläraja* $\sup E$ on olemassa, jos (i) joukko E on epätyhjä ja (ii) joukko E on ylhäältä rajoitettu. Jos M on joukon E jokin muu yläraja, niin on voimassa $M \ge \sup E$. Merkitään

$$E_1 = \{f(x) \mid a \le x \le b\} \quad \text{ja} \quad E_2 = \{f(x) \mid c \le x \le d\}.$$

Koska väli $[a,b]$ on epätyhjä, niin E_1 on epätyhjä. Koska lisäksi oletuksien mukaan E_1 on ylhäältä rajoitettu, niin $\sup E_1$ on olemassa.

Olkoon $x \in [c,d]$. Tällöin $x \in [a,b]$ ja lisäksi supremumin määritelmän nojalla on voimassa, että $f(x) \le \sup E_1$. Näin ollen joukko E_2 on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu. Siispä $\sup E_2$ on olemassa. Koska $\sup E_1$ on yläraja joukolle E_2, niin supremumin määritelmän nojalla pätee $\sup E_2 \le \sup E_1$.

2. Laske

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx.$$

Ratkaisu: Koska jokaisella $x \ge 0$ on $D\ln(x+2) = 1/(x+2)$, niin analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = \Big/_{0}^{1} \ln(x+2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

3. Laske

$$\int_0^{\pi/3} e^{3x}\cos(2x)\,dx.$$

Vihje: soveltamalla osittaisintegrointia kahdesti voit saada yhtälön, josta ratkaisemalla saat selville kysytyn integraalin.

Ratkaisu: Valitaan ensin, että e^{3x} on derivaatta ja osittaisintegroidaan

$$\int_0^{\pi/3} e^{3x}\cos(2x)\,dx = \Big/_{0}^{\pi/3} \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x) + \int_0^{\pi/3} \frac{2}{3}e^{3x}\sin(2x)\,dx.$$

Yhtälön oikealla puolella olevassa integraalissa valitaan derivaataksi $\frac{2}{3}e^{3x}$ ja osittaisintegroidaan

$$\int_0^{\pi/3} \frac{2}{3}e^{3x}\sin(2x)\,dx = \Big/_{0}^{\pi/3} \frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x) - \int_0^{\pi/3} \frac{4}{9}e^{3x}\cos(2x)\,dx.$$

Huomataan, että saatu uusi integroitava termi on kerrointa vaille sama kuin alkuperäinen integraali. Tällöin on

$$\begin{aligned}
\frac{13}{9}\int_0^{\pi/3} e^{3x}\cos(2x)\,dx &= \Big/_{0}^{\pi/3} \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x) + \Big/_{0}^{\pi/3} \frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x)\\
&= \frac{1}{3}\left[e^{\pi}\cos(\frac{2\pi}{3}) - e^{0}\cos 0\right] + \frac{2}{9}\left[e^{\pi}\sin(\frac{2\pi}{3}) - e^{0}\sin 0\right]\\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{e^{\pi}}{2} - 1\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{e^{\pi}\sqrt{3}}{2} - 0\right)\\
&= \frac{3}{9}\cdot\frac{-e^{\pi}-2}{2} + \frac{2}{9}\cdot\frac{e^{\pi}\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla 9/13 jolloin saamme

$$\int_0^{\pi/3} e^{3x}\cos(2x)\,dx = \frac{2\sqrt{3}e^{\pi} - 3e^{\pi} - 6}{26} = \frac{(2\sqrt{3}-3)e^{\pi} - 6}{26}.$$

4. Tutkitaan funktiota $f\colon [0,100] \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = \cos x$. Anna esimerkki jaosta D, jolla $S_D - s_D < 10^{-100}$. Vihje: tarkastele tasavälistä jakoja. Kannattaa muistaa väliarvolausetta.

Ratkaisu: Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin välin $[0,100]$ tasavälinen jako D_n, jossa on n osaväliä on

$$D_n = \{0, \frac{1\cdot 100}{n}, \frac{2\cdot 100}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\cdot 100}{n}, 100\}.$$

Kun $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on osavälin $\Delta_k = \left[\frac{(k-1)\cdot 100}{n}, \frac{k\cdot 100}{n}\right]$ pituus $l(\Delta_k) = 100/n$. Palautetaan mieleen, että

$$G_k = \sup\{f(x) : x \in \Delta_k\} \quad \text{ja} \quad g_k = \inf\{f(x) : x \in \Delta_k\}.$$

Funktio $f\colon [0, 100] \to \mathbb{R}$, missä $f(x) = \cos x$, on jatkuva. Koska jokaisella k on osaväli Δ_k suljettu, niin jokaisella k on olemassa sellainen piste $x_k \in \Delta_k$, että $f(x_k) = G_k$. Vastaavasti jokaisella k on olemassa sellainen piste $y_k \in \Delta_k$, että $f(y_k) = g_k$.

Koska funktio f on derivoituva välillä $]0, 100[$, niin väliarvolauseen nojalla jokaisella k on olemassa piste ξ_k, joka on lukujen x_k ja y_k välissä siten, että

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{x_k - y_k} = f'(\xi_k) \iff G_k - g_k = f'(\xi_k)(x_k - y_k).$$

Koska erotus $G_k - g_k$ on aina epänegatiivinen, niin edellisestä yhtälöstä saamme

$$G_k - g_k = f'(\xi_k)(x_k - y_k) = |f'(\xi_k)(x_k - y_k)| \leq l(\Delta_k),$$

sillä $|f'(\xi_k)| = |-\sin \xi_k| \leq 1$ ja $|x_k - y_k| \leq l(\Delta_k)$. Näin ollen ylä- ja alasumman erotukseksi saamme

$$\begin{aligned} S_{D_n} - s_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} G_k l(\Delta_k) - \sum_{k=1}^{n} g_k l(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} (G_k - g_k) l(\Delta_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} l(\Delta_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{100}{n}\right)^2 = n \cdot \frac{100^2}{n^2} = \frac{10^4}{n}. \end{aligned}$$

Valitaan siis n siten, että $n > 10^{104}$.