MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 1. kurssikoetta varten
28.2.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia: Aapo Tevanlinna

1. Laske

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx.$$

Ratkaisu: Koska jokaisella $x \in [0,1]$ pätee $D(\frac{1}{2}e^{x^2}) = xe^{x^2}$, niin analyysin peruslauseen nojalla on voimassa, että

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \bigg/_{\!0}^{1} \frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{e-1}{2}.$$

2. Laske

$$\int_0^1 x^2e^x dx.$$

Ratkaisu: Sovelletaan osittaisintegrointia tehtävän integraaliin useamman kerran. Muistin virkistämiseksi kannattaa aina kirjoittaa jonnekin ylös osittaisintegrointikaava:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \bigg/_{\!a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Lähdetään sitten laskemaan: Jokaisessa välivaiheessa pidetään derivaattana $g'(x)$ termiä e^x, jolloin

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^x dx &= \bigg/_{\!0}^{1} x^2e^x - \int_0^1 2xe^x dx = \bigg/_{\!0}^{1} x^2e^x - \left(\bigg/_{\!0}^{1} 2x^2e^x - \int_0^1 2e^x dx\right) \\ &= \bigg/_{\!0}^{1} x^2e^x - \bigg/_{\!0}^{1} 2xe^x + \bigg/_{\!0}^{1} 2e^x = (e-0) - (2e-0) + (2e-2) \\ &= e - 2.\end{aligned}$$

3. Suppeneeko
$$\int_1^\infty \frac{x+7}{3x^2-2}\,dx?$$

Ratkaisu: Tämmöisissä tehtävissä kannattaa miettiä, että kannattaako etsiä suoraan integraalifunktiota ja ratkaista tehtävä sen avulla vaiko käyttää hyväksi jotain kätevämpää menetelmää. Omasta mielestäni järkevintä tässä on olla etsimättä integraalifunktiota ja koittaa ratkaista ongelma monisteesta löytyvällä minoranttiperiaatteella.

Syy miksi lähden etsimään sopivaa alhaalta approksimoivaa funktiota, on että "äärettömyydessä" tehtävämmme funktio alkaa imitoimaan funktion $x \mapsto 1/x$ käyttäytymistä. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että funktion "laskeutuminen" kohti nollaa ei ole riittävän nopeaa, jotta epäoleellinen integraali suppenisi. Nyrkkisääntönä ylipäänsä tämmöisiin tehtäviin on vertailla osoittajassa ja nimittäjässä olevia korkeimpia potensseja ja tehdä johtopäätöksiä niistä.

Huomataan ensin, että $0 \leq 3x^2 - 2 \leq 3x^2$ ja $x + 7 > x > 0$, kun $x \geq 1$. Näin ollen kaikilla $x \geq 1$ on voimassa, että
$$\frac{x+7}{3x^2-2} \geq \frac{x+7}{3x^2} \geq \frac{x}{3x^2} = \frac{1}{3x} \geq 0.$$
Tutkitaan löydetyn minoroivan funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $g(x) = 1/3x$, epäoleellisen integraalin $\int_1^\infty g(x)dx$ suppenemista: Olkoon $c > 1$. Nyt
$$\int_1^c \frac{1}{3x}dx = \Big/_1^c \frac{1}{3}\ln 3x = \frac{1}{3}(\ln 3c - \ln 3) \overset{c\to\infty}{\to} \infty,$$
joten minoroivan funktion g epäoleellinen integraali hajaantuu. Siispä minoranttiperiaatteen nojalla $\int_1^\infty \frac{x+7}{3x^2-2}dx$ hajaantuu.

Huomatus: Tämän tehtävän voisi myös ratkaista esim. vertailutestilla. Toisaalta, koska se perustuu majorantti- ja minoranttiperiaatteisiin, en henkilökohtaisesti näe erityistä etua sen käytössä.

4. (a) Anna esimerkki funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle epäoleellinen integraali
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

hajaantuu vaikka raja-arvo

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

on olemassa. Perustele väitteesi!

(b) Oletetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

suppenee. Osoita, että

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Ratkaisu: Monisteessa on tähän tehtävään liittymä määritelmä 1.9. Sen mukaan sekä ala- että ylärajan suhteen epäoleellinen integraali suppenee, jos ja vain jos[1] epäoleelliset integraalit

$$\int_{-\infty}^{d} f(x)dx \quad \text{ja} \quad \int_{d}^{\infty} f(x)dx$$

molemmat suppenevat. Edellisessä $d \in \mathbb{R}$ on jokin vapaavalintainen jakopiste.
(a) Määritellään $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x$. Olkoon jakopiste $d = 0$ ja $a > 0$. Nyt

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \Big/_{0}^{a} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}a^2 \overset{a\to\infty}{\to} \infty,$$

joten epäoleellinen integraali $\int_0^\infty f(x)dx$ hajaantuu. Siispä myös $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ hajaantuu. Kuitenkin jokaisella $a > 0$ on voimassa, että

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \Big/_{-a}^{a} \frac{1}{2}x^2 = 0,$$

[1]Monisteessa lukee hämäävästi "jos, niin", joka pitää tulkita yhtäpitävyydeksi eikä seuraukseksi..

joten $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} 0 = 0$!
(b) Valitaan mukavuuden vuoksi jakopisteeksi $d = 0$. Määritelmän 1.9 nojalla epäoleelliset integraalit $\int_0^\infty f(x)dx$ ja $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ suppenevat, sillä $\int_\infty^\infty f(x)dx$ suppenee. Tällöin on lisäksi voimassa, että

$$\int_\infty^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.$$

Olkoon $a > 0$. Nyt pätee

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \overset{a\to\infty}{\to} \int_\infty^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx,$$

mikä oli itseasiassa juuri se mitä haettiinkin.